

REALISMO ONTOLÓGICO, ONTOLOGIA MATEMÁTICA E LÓGICA

Leibniz, complexidade e incompletude

Leibniz, complexity and incompleteness

* Gregory J. Chaitin

** Virginia Maria F. Gonçalves Chaitin

Resumo: Este artigo é uma versão traduzida, revisada e expandida do artigo de G. J. Chaitin publicado em língua inglesa no *American Philosophical Association Newsletter on Philosophy and Computers* em 2009, uma palestra proferida em junho de 2008 na Universidade de Roma "Tor Vergata", cujos trechos preservados aparecem aqui em primeira pessoa. Discutimos as ideias de Leibniz sobre a complexidade, e os desenvolvimentos três séculos mais tarde.

Palavras-chave: Complexidade. Incompletude. Leibniz. Teoria da informação algorítmica (TIA). H. Weyl.

Abstract: This paper is the translated, revised and expanded version of G. J. Chaitin's essay published in the *American Philosophical Association Newsletter on Philosophy and Computers* in 2009, based on a conference given in June 2008 at the University of Rome "Tor Vergata", the preserved parts of which appear here in the first person. In the present essay, we discuss the ideas of Leibniz on complexity, and developments three centuries later.

Keywords: Complexity. Incompleteness. Leibniz. Algorithmic Information Theory (AIT). H. Weyl.

* Professor na *Coppe* (Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia), da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

** Pesquisadora independente. Doutora em epistemologia e filosofia da ciência pela HCTE/UFRJ. Contato: <<https://independent.academia.edu/VirginiaChaitin>>.



Permitam-me começar falando de Hermann Weyl, um excelente matemático e também físico matemático. Ele escreveu livros sobre mecânica quântica e teoria da relatividade geral. Ele também escreveu dois livros de filosofia: *The Open World: Three Lectures on the Metaphysical Implications of Science* (1932), um pequeno livro com três palestras que Weyl apresentou na Universidade de Yale em New Haven, e *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, publicado pela Princeton University Press em 1949, sendo uma versão expandida de um livro originalmente publicado em língua alemã.

Nesses dois livros, Weyl enfatiza a importância para a filosofia da ciência de uma ideia de Leibniz relativa ao conceito de complexidade, uma ideia verdadeiramente fundamental. A questão que se põe é a seguinte: o que é uma lei da natureza ou, o que significa dizer-se que a natureza segue leis? Weyl explica a ideia de Leibniz em *The Open World*, p. 40-41 da seguinte maneira: O conceito de lei seria vácuo caso se aceitassem leis arbitrariamente complicadas porque, se assim fosse, sempre haveria uma lei. Em outras palavras, para um conjunto de dados experimentais quaisquer, sempre haverá uma lei *ad hoc*, e esse tipo de lei não tem nenhum valor. A simplicidade é, portanto, um componente intrínseco ao conceito de lei da natureza.

Vejam os que o próprio Leibniz disse a respeito da complexidade. Bem, posso dizer que encontrei três, ou talvez quatro obras nas quais Leibniz diz algo importante sobre este tema. Gostaria de repassá-los antes de voltar a Weyl e seguir com Popper e outros desdobramentos mais atuais.

Primeiramente, Leibniz se refere à complexidade nas Seções V e VI em seu *Discours de métaphysique* (1686), o qual consiste de notas escritas durante uma nevasca que interrompeu seus esforços para melhorar o bombeamento de água para fora das minas de prata nas montanhas Harz. Essas notas não foram publicadas até mais de um século após o seu falecimento. Em verdade, a maioria das melhores ideias de Leibniz ficou registrada em sua intensa correspondência com os mais destacados intelectuais europeus de sua época, ou foi encontrada somente muitos anos após, entre seus escritos particulares. Lembremo-nos que não havia muitas revistas científicas no século XVII. Ao invés disso, os intelectuais europeus se comunicavam pela então denominada *La République des lettres*. Isto porque a publicação de ideias novas era muito arriscada. Leibniz chegou a enviar um resumo do *Discours de métaphysique* ao *philosophe* Arnauld – ele mesmo um fugitivo jansenista do Rei Luís XIV – o qual ficou tão horrorizado com as possíveis implicações heréticas do *Discours*, que Leibniz nunca enviou essas notas a mais ninguém. Note-se que o título do *Discours* foi dado

pelo editor que o encontrou entre os escritos de Leibniz, não por ele mesmo.

Gostaria de acrescentar que os escritos de Leibniz foram preservados por acaso, somente porque a sua maioria tratava de assuntos de estado. Quando Leibniz faleceu, seu patrono, o Duque de Hanover, àquela altura Rei da Inglaterra, ordenou que seus escritos não fossem entregues aos seus familiares, mas preservados e selados nos arquivos reais de Hanover. Além disso, gostaria de comentar também que Leibniz não deixou uma versão definitiva de suas ideias, as quais estavam sempre em estado de desenvolvimento. Seus interesses se diversificavam entre diferentes campos do saber, onde sempre lançava ideias fundamentais sem, contudo, na maioria das vezes, deter-se a seu detalhamento, com exceção do cálculo infinitesimal.

Voltando ao conteúdo da obra de Leibniz, na Seção V do *Discours*, Leibniz afirma que Deus criou o melhor dentre todos os mundos possíveis, no sentido de que toda a riqueza e diversidade que se observa no universo resulta de um conjunto de ideias belo, simples e elegante. Deus simultaneamente maximiza a riqueza do mundo e minimiza a complexidade das leis que determinam este mundo. Em terminologia moderna, o mundo é inteligível, compreensível; a ciência é possível. Vejam bem, o *Discours* foi escrito em 1686, no ano anterior ao que Newton, nêmesis de Leibniz, publicou o seu *Principia*, quando ainda coexistiam a teologia medieval e a ciência moderna, então denominada filosofia mecânica. Naquela época, a questão de por quê a ciência é possível, era uma questão muito séria. A ciência moderna era jovem, e ainda não havia obliterado toda oposição.

Contudo, a ideia mais fundamental de Leibniz, a que impressionou tanto a Weyl, está na Seção VI do *Discours*. Ali Leibniz pondera acerca de “dados experimentais” produzidos pelo espalhamento de pequenas manchas de tinta projetadas sobre uma folha de papel agitando-se uma pluma. Consideremos o conjunto finito de pontos assim obtido e perguntemo-nos o que significa dizer que estes pontos obedecem a uma lei da natureza. Bem, diz Leibniz, isto não pode apenas querer dizer que existe uma equação matemática que passe por esse conjunto de pontos, porque sempre haverá uma tal equação! O referido conjunto de pontos obedece a uma lei somente se houver uma equação *simples* que passe por esses pontos, e não se a equação for *fort composée* (ou seja, muito complexa) porque, nesse caso, sempre haveria uma lei.

Leibniz também se refere à complexidade em outra de suas obras, na Seção 7 de *Princípios da natureza e da graça* (1714), onde pergunta “porque há alguma coisa em vez de nada?” – por que o mundo não é vazio – uma vez que “o nada é mais simples e mais fácil do que alguma

coisa"! Em termos modernos: de onde vem a complexidade do mundo? Sob o ponto de vista de Leibniz, vem de Deus; em terminologia moderna, da escolha das leis da natureza e das condições iniciais que determinam o mundo. Aqui eu devo mencionar um desdobramento contemporâneo surpreendente: a fabulosa ideia de Max Tegmark de que o conjunto de todas as leis possíveis, de todos os mundos possíveis, é mais simples do que a escolha de um mundo em particular. Em outras palavras, o multiverso é mais fundamental do que a questão de quais são as leis de nosso universo em particular, o qual meramente resulta ser nosso "endereço postal" no multiverso de todos os mundos possíveis! Para ilustrar essa ideia, o conjunto de **todos** os inteiros positivos 1, 2, 3, ... é muito simples, embora **um** inteiro positivo **em particular**, tal como 9859436643312312, pode ser arbitrariamente complexo.

Uma terceira obra onde Leibniz se refere à complexidade é a *Monadologia* (1714), nas Seções 33-35, onde discute o que significa apresentar uma prova matemática. Ele observa que, para provar uma afirmação complicada, desmembra-se esta afirmação em afirmações mais simples, até atingirmos afirmações tão simples que são autoevidentes e não requerem prova. Dito de outra forma, uma prova reduz algo complicado a uma consequência de afirmações mais simples, evitando uma regressão ao infinito porque nos detemos quando nossa análise reduz este algo a uma consequência de princípios tão simples que não se requer mais nenhuma prova.

Talvez haja ainda mais um comentário interessante sobre a complexidade feito por Leibniz, mas não tive a oportunidade de identificar a fonte original para verificá-lo. Há indícios de fonte secundária que, em certa ocasião, Leibniz fora interpelado por que deu-se ao trabalho de evitar esmagar uma aranha, ao que ele respondeu que seria uma lástima destruir um mecanismo tão intrincado. Se tomarmos "intrincado" como sinônimo de "complexo" então talvez isso mostre que Leibniz reconhecia que os organismos biológicos são extremamente complexos.

Estes são os trechos mais interessantes que encontrei na obra de Leibniz sobre complexidade. Tal como meu amigo Stephen Wolfram comentou, o vasto *Nachlass* de Leibniz pode muito bem guardar outros tesouros, uma vez que os editores tendem a publicar somente o que lhes parece compreensível. Isto se dá apenas na época em que uma ideia tenha sido elaborada independentemente e a tal ponto que seu valor possa ser reconhecido e apreciado, além do fato que Leibniz a tenha captado em seu conceito essencial.

Havendo apresentado o que penso serem as observações mais interessantes de Leibniz sobre simplicidade e complexidade, permitam-me voltar a Weyl e Popper. Weyl observa que este conceito crucial de

complexidade, cujo papel fundamental foi identificado por Leibniz é, infelizmente, muito difícil de definir com precisão. Como medir a complexidade de uma equação? Bem, falando grosso modo, por seu tamanho, embora este seja muito variável ao longo do tempo, uma vez que a notação matemática muda com os anos, além de ser altamente arbitrária a escolha de quais funções matemáticas são consideradas dadas, ou seja, tidas como operações primitivas. Por exemplo, deve-se aceitar as funções de Bessel como parte da notação matemática padrão?

Finalmente, o percurso intelectual sobre complexidade foi abraçado por Karl Popper em seu livro *The Logic of Scientific Discovery* (1959) – o qual também foi originalmente publicado em língua alemã – e que possui um capítulo inteiro dedicado ao conceito de simplicidade, o Capítulo VII. Nesse capítulo Popper revisita os comentários de Weyl e agrega que, se Weyl não logrou formular uma definição estável de complexidade, então isto deve ser algo muito difícil de alcançar.

Após Popper, essas ideias sobre complexidade desaparecem temporariamente de cena, apenas para serem retomadas, para reaparecerem metamorfozadas, numa área que denomino *teoria da informação algorítmica* (TIA). Creio que esta teoria apresenta uma resposta à questão de como formular uma definição precisa da complexidade de uma lei. Isto se logra mudando o contexto. Ao invés de considerar os dados experimentais como pontos e a lei como uma equação, a TIA torna tudo digital (discreto), tudo se transforma em 0's e 1's. Na TIA, a lei da natureza é uma peça de software, um programa, um algoritmo computacional e, ao invés de tentar medir a complexidade de uma lei via o tamanho de uma equação, iremos considerar o tamanho de programas, o número de bits no programa que implementa a teoria em questão:

Lei: Equação → Programa;

Complexidade: Tamanho da equação → Tamanho do programa,
Quantidade de bits de software.

O diagrama que se segue ilustra a ideia central da TIA, que consiste de um modelo prototípico simplificado da prática científica:

Teoria (01100...11) → **COMPUTADOR** → Dados Experimentais (110...0).

Neste modelo, tanto a teoria quanto os dados são cadeias finitas de bits. Teorias são software para explicar dados experimentais e, no modelo da TIA, isto significa que o software produz todos esses dados de maneira exata, sem erros. Em outras palavras, em nosso modelo a teoria científica é um programa autocontido (sem entrada), cuja saída são os dados experimentais.

Então, o que acontece com as considerações fundamentais de Leibniz sobre o significado de “lei da natureza”? Naquele contexto, sempre

haverá uma equação complicada que passará por todos os pontos dos dados experimentais. Aqui, sempre haverá uma teoria com o mesmo número de bits que os dos dados experimentais por ela explicados, porque o programa sempre poderá conter os dados que tenta explicar como uma constante, sem ter que realizar qualquer cálculo. Neste caso, não há uma lei; em realidade não há uma teoria. Dados experimentais podem ser compreendidos – seguem uma lei – somente se o programa que os calcula for muito menor em bits que esses mesmos dados.

Em outras palavras, inteligibilidade é compressibilidade, compreender é comprimir. Uma teoria científica unifica fenômenos aparentemente díspares e mostra que eles refletem um mecanismo subjacente em comum.

Resumindo, entendemos que um programa de computador equivale a uma teoria para sua saída – esta é a ideia essencial – e tanto a teoria quanto a saída são uma cadeia de bits cujos tamanhos podem ser comparados. Além disso, a melhor teoria é o programa de menor tamanho que produz como saída um determinado conjunto de dados experimentais, sem nenhum erro. Esta é nossa versão do que alguns chamam de “Navalha de Occam” – que eu preferiria chamar de “Navalha de Leibniz” – uma vez que foi Leibniz quem explicou o *por quê* da navalha.

Esta nova abordagem da TIA permite que procedamos matematicamente tanto para uma definição precisa de complexidade quanto para a formulação de demonstrações empregando esta nova rede de conceitos. Então, assim que partimos por este caminho, a primeira descoberta é que a grande maioria das cadeias finitas de bits não seguem nenhuma lei, são algoritmicamente irreduzíveis, algoritmicamente aleatórias, porque não há nenhuma teoria para as referidas cadeias de bits que seja substancialmente menor em tamanho do que as mesmas. Em outras palavras, o programa de menor tamanho para esse tipo de saída tem quase o mesmo tamanho que a própria saída. A segunda descoberta é que é impossível saber, com certeza, se uma determinada teoria é a melhor, a mais concisa, a mais simples, a de tamanho menor possível medido em bits.

Antes de seguir discutindo esta segunda descoberta, talvez eu devesse mencionar que a TIA foi originalmente proposta de forma independente por três pessoas, a saber: Ray Solomonoff, A. N. Kolmogorov e por mim mesmo na década de '60. Contudo, a teoria original apresentava algumas deficiências sérias. Uma década mais tarde, em meados dos anos '70, emergiu o que considero ser a versão definitiva da teoria, novamente de forma independente, porém desta vez por mim e por Leonid Levin, embora Levin não tenha apresentado a definição de complexidade relativa de forma inteiramente satisfatória. Discutirei mais adiante e em

mais detalhe a versão dos anos '70 da TIA – a que emprega programas que denomino *autodelimitados* – quando for apresentar a probabilidade de parada Ω .

Por hora, volto à questão de provar que uma dada teoria é a melhor ou aquela que vem a ser o programa de menor tamanho que produz a sua saída. Isto parece fácil? Em verdade, isto é algo extremamente difícil de fazer, e nos proporciona um novo enfoque à incompletude baseado no conceito de complexidade, bastante diferente dos resultados clássicos de incompletude de Gödel (1931) e de Turing (1936). A seguir apresento o porquê da extrema dificuldade da prova de que uma dada teoria é a melhor.

Primeiramente, denominaremos um programa “elegante” se for a melhor teoria para sua saída, ou seja, se for o menor programa na linguagem de programação escolhida que produz sua saída¹. Suponhamos que a linguagem de programação seja invariante e consideremos o problema de empregar uma teoria axiomática formal – uma teoria matemática com um número finito de axiomas descritos numa linguagem formal artificial e empregando as regras da lógica matemática – para provar que programas específicos sejam elegantes. Mostremos que isto é difícil de fazer, examinando o seguinte programa **P**:

P produz a saída do primeiro programa demonstravelmente elegante e que tem tamanho maior que **P**.

Dito de outra forma, **P** sistematicamente percorre a árvore de todas as provas possíveis na teoria formal até encontrar uma prova de que um certo programa **Q**, de tamanho maior que **P**, seja elegante. Em seguida, o programa **P** executa o programa **Q** e produz a mesma saída que **Q** produz. Mas, isso não é possível porque **P** não tem tamanho suficiente para produzir essa saída, uma vez que **Q** é elegante! **P** não pode produzir a mesma saída que um programa comprovadamente elegante **Q** de tamanho maior que **P**, porque isso contradiz a definição de programa elegante, supondo-se que todos os programas comprovadamente elegantes o sejam de fato. Portanto, **P** jamais vai encontrar **Q**, e todos os programas comprovadamente elegantes em nossa teoria formal terão tamanho necessariamente menor ou igual que **P**. Logo, se nossa teoria formal prova que são elegantes somente aqueles programas realmente elegantes, então esta prova pode ser feita para somente um número finito de programas.

¹ *Nota bene*: aqui deixamos de falar de teorias da natureza para falar de teorias matemáticas. Uma teoria da natureza produz uma cadeia finita de bits enquanto uma teoria da matemática produz um conjunto infinito de teoremas.

Não obstante, lembremos que há um número infinito de programas elegantes!

Esta é uma forma radicalmente diferente de se chegar à incompletude, totalmente distinta da forma como Gödel o fez, com seu “Esta afirmação não é demonstrável.”, ou como Turing também o fez, observando que nenhuma teoria formal pode determinar para todos os casos se um dado programa vai ou não se deter, seu famoso Problema da Parada. É diferente porque envolve complexidade. Mostra que o mundo das ideias matemáticas é infinitamente complexo, enquanto nossas teorias formais têm complexidade necessariamente finita. Inclusive, somente provar que um dado programa é elegante já requer complexidade infinita. Então, o que precisamente quero dizer quando falo da complexidade de uma teoria matemática formal?

Bem, se observarmos atentamente o paradoxal programa **P** descrito acima, cujo tamanho é uma cota superior ao que pode ser provado, veremos que esta cota superior é essencialmente o tamanho em bits de um programa capaz de percorrer toda a árvore de provas possíveis obtidas usando a lógica matemática a partir dos axiomas, assim produzindo todos os teoremas na respectiva teoria formal. Em outras palavras, na TIA a complexidade de uma teoria matemática é simplesmente o tamanho do menor programa que gera todos os teoremas nessa teoria.

O que acabamos de demonstrar foi que, se um programa **Q** for mais complicado que a teoria formal **T** então, **T** não é capaz de provar que **Q** é elegante. Dito de outra forma, a prova que um programa de **N** bits seja elegante requer uma teoria formal de, pelo menos, **N** bits. O mundo platônico de ideias matemáticas é infinitamente complexo, mas o que podemos saber é apenas uma parte finita dessa complexidade infinita, dependendo da complexidade de nossas teorias.

Vamos agora comparar o mundo da matemática com o mundo da biologia. A biologia lida com sistemas muito complexos. Não há equações simples para seu cômputo, ou para a sociedade humana. Contudo, a matemática é ainda mais complicada que a biologia. O genoma humano consiste de 3×10^9 bases, ou seja, 6×10^9 bits, o que é uma quantidade considerável, mas que é apenas finita. Não obstante, a matemática é, comprovadamente, infinitamente complicada.

Uma ilustração ainda mais dramática dessas ideias é dada pela probabilidade de parada Ω , cujas propriedades principais vou resumir aqui sem entrar em maiores detalhes. Ω é definido pela probabilidade de que um programa gerado pelos lances de uma moeda vá, eventualmente, parar. Mais precisamente, cada programa de tamanho **K** bits que se detém, contribui com 1 sobre 2^K para a probabilidade de parada Ω . É

preciso esclarecer que, para mostrar que Ω é uma probabilidade bem definida entre zero e um, torna-se essencial empregar a versão dos anos '70 da TIA, empregando os programas autodelimitados. Na versão dos anos '60 da TIA a probabilidade de parada não pode ser bem definida porque a soma das probabilidades constituintes diverge, o que foi uma das razões pela qual foi necessário corrigir a TIA.

De toda maneira, Ω é uma espécie de ADN para a matemática pura, porque contém as repostas para todos os casos específicos do Problema da Parada. Além disso, a representação numérica binária, base dois, da probabilidade de parada Ω consiste de uma cadeia infinita irredutível de fatos matemáticos:

$$\Omega = ,11011\dots$$

Cada um desses bits, cada bit de Ω , é forçosamente 0 ou 1, mas o equilíbrio entre esses 0's e 1's é tão delicado, que nunca saberemos qual é. Mais precisamente, para determinar \mathbf{N} bits de Ω se requer uma teoria formal de \mathbf{N} bits.

Empregando terminologia leibniziana, podemos dizer que os bits de Ω são fatos matemáticos que refutam o principio da razão suficiente porque não há nenhuma razão pela qual cada um dos bits tenha o seu valor, nenhuma razão mais simples do que eles mesmos. Os valores numéricos da cadeia infinita dos bits de Ω estão no mundo platônico das ideias e são, portanto, verdades *necessárias* porém, têm a aparência de verdades *contingentes*, acidentais. Este é o lugar surpreendente para onde fomos trazidos pelas ideias de Leibniz sobre complexidade, a um lugar onde a matemática parece não ter nenhuma estrutura ou, pelo menos, nenhuma estrutura que jamais possamos perceber. De que maneira Leibniz reagiria diante disso?

Primeiramente, acredito que ele seria capaz de compreender tudo instantaneamente. Ele sabia tudo sobre 0's e 1's, e havia inclusive proposto ao Duque de Hanover que cunhasse uma medalha de prata em homenagem à aritmética de base dois, em homenagem ao fato que tudo pode ser representado por meio de 0's e 1's. Entre os escritos particulares de Leibniz foram encontrados diversos projetos para essa medalha, mas nenhum deles chegou a ser efetivamente cunhado, até que Stephen Wolfram escolheu um desses projetos e o fez em prata como um presente para meu aniversário de 60 anos. Não tomo este gesto como uma honraria a mim, mas como um reconhecimento ao grande apreço que Wolfram e eu nutrimos por Leibniz.

Outra ideia que Leibniz compreendeu muito bem foi a de uma teoria formal enquanto uma teoria na qual podemos mecanicamente

deduzir todas as suas consequências. De fato, o cálculo infinitesimal é precisamente um exemplo disso. Christian Huygens, que introduziu Leibniz à matemática em Paris, detestava seu cálculo infinitesimal porque era mecânico e gerava as respostas automaticamente, meramente a partir de manipulações formais, sem exigir o entendimento do que as fórmulas significavam. Com efeito, esta era precisamente a ideia de Leibniz, e o aspecto mais marcante com que seu cálculo diferia do de Newton. Leibniz inventou uma notação que levava automaticamente, mecanicamente à resposta, somente pelo obediência a certas regras formais.

Ademais, a ideia de computar por meio de uma máquina certamente não era estranha a Leibniz. Ele foi eleito para a *Royal Society* de Londres – antes da disputa por prioridade com Newton arruinar tudo – com base em seu projeto para uma máquina de multiplicar. (A máquina calculadora de Pascal, anterior à de Leibniz, fazia somente operações de soma.)

Por estes motivos, não acredito que Leibniz ficasse chocado; acredito que ele teria apreciado Ω bem como suas propriedades paradoxais. Leibniz era aberto a todos os *systemes du monde*, ele encontrava algum bem em todas as filosofias: antiga, escolástica, mecânica, kabalística, alquímica, chinesa, católica e protestante. Lhe proporcionava uma profunda satisfação intelectual mostrar que os sistemas filosóficos aparentemente contraditórios eram, em verdade, compatíveis. Esta foi a razão de ser de seus esforços em reunificar o Catolicismo com o Protestantismo. Acredito que isto explica o fabuloso caráter de sua *Monadologia* a qual, mesmo sendo rebuscada, mostra que certas ideias aparentemente contraditórias não são em verdade totalmente irreconciliáveis.

Acredito que necessitamos de ideias para inspiração. Uma maneira de fazê-lo é pela escolha de heróis que exemplificam o melhor que a humanidade pode produzir. Para esta finalidade, proponho a Leibniz como um desses heróis inspiradores.

Sugestões de leitura

CHAITIN, G. J. *Thinking about Gödel and Turing: Essays on Complexity, 1970-2007*. Singapore: World Scientific, 2007.

_____. *MetaMat! Em busca do ômega*. São Paulo: Perspectiva, 2009.

_____. "A busca pela linguagem perfeita". *Dicta & Contradicta*, n. 4, 2009. Disponível em: <<http://www.dicta.com.br/edicoes/>>.

_____. *Matemáticas, complejidad y filosofía. Conferencias pronunciadas en Canadá y Argentina*. Valparaíso: Midas, 2011.

_____. *Demostrando a Darwin: La biología en clave matemática*. Barcelona: Tusquets, 2013.

_____. *El número omega: Límites y enigmas de las matemáticas*. Barcelona: Tusquets, 2015.

CHAITIN, G. J.; CHAITIN, V. M. F. G. "Metafísica, metamatemática e metabiologia". *Tempo Brasileiro*, n. 189/190, 2012.

Endereço postal:

Programa de Pós-graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia
Universidade Federal do Rio de Janeiro – Secretaria Acadêmica do HCTE
NCE – Sala E1022, no CCMN, Cidade Universitária
Ilha do Fundão, RJ, Brasil

Data de recebimento: 02-11-2016

Data de aceite: 07-11-2016