

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL  
FACULDADE DE MATEMÁTICA

CÁSSIA PEREIRA DA ROSA MOSCHOUTIS

**ANÁLISE DO CRESCIMENTO POPULACIONAL BRASILEIRO**

Porto Alegre  
2013

CÁSSIA PEREIRA DA ROSA MOSCHOUTIS

**ANÁLISE DO CRESCIMENTO POPULACIONAL BRASILEIRO**

Trabalho de conclusão de curso, apresentado como requisito para a obtenção do grau de Bacharel em Matemática com Ênfase em Matemática Empresarial pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Dra. Eliete Baisotto Hauser

Porto Alegre  
2013

CÁSSIA PEREIRA DA ROSA MOSCHOUTIS

**ANÁLISE DO CRESCIMENTO POPULACIONAL BRASILEIRO**

Trabalho de conclusão de curso, apresentado como requisito para a obtenção do grau de Bacharel em Matemática com Ênfase em Matemática Empresarial pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Aprovada em: \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

**BANCA EXAMINADORA:**

---

Profa. Dra. Eliete Baisotto Hauser

---

Prof. Dr. Hélio Radke Bittencourt - PUCRS

---

Profa. Me. Neda da Silva Gonçalves - PUCRS

Porto Alegre  
2013

“A todos os anônimos da sociedade, que compreendem que a existência é um grande contrato de risco e que “leram” nas cláusulas desse contrato que o drama e a comédia, as perdas e os ganhos, o deserto e o oásis, o relaxamento e o estresse são privilégios dos vivos.” (Augusto Curry)

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar agradeço a Deus por nunca ter me abandonado em toda às jornadas que atravessei, por todas as oportunidades que me foram dadas na vida, até mesmo as fases difíceis, que se tornaram alavancas para meu amadurecimento.

Aos meus pais e irmão, pela torcida, por vibrarem com todas as minhas conquistas. Obrigada por serem a minha referência de tantas maneiras e estarem sempre presentes na minha vida, mesmo quando alguns quilômetros nos separam. Sem vocês nada seria possível.

Ao meu esposo, Sergio, pela paciência e compreensão ao longo desses três anos e meio de curso, entendendo o meu gosto pelo estudo.

As minhas amigas, Aristaili, Michele, Paula e Silvia, pois agradeço a Deus todos os dias por tê-las colocado em minha vida, minhas amigas, minhas confidentes. Ao Thalles, que além de amigo, adotei como irmão mais novo e por quase toda faculdade esteve junto comigo nos melhores e piores momentos.

A professora Maria Beatriz que me recebeu no curso no meu primeiro dia de aula e que tive a oportunidade de ser sua aluna.

A professora Eliete e aos demais professores da banca pela paciência e pelos puxões de orelha necessários para que no fim este trabalho estivesse concluído.

A Cris que em todos os semestres fez o possível e o impossível para que eu pudesse cursar as cadeiras que eu precisava.

A Adelina, Cleo e Veroni pela atenção sem medidas toda vez que necessitava de algo.

A todos os professores e funcionários que de alguma maneira colaboraram para que este momento se tornasse realidade, em especial a professora Neda, que como poucos professores que existem, nos fascina com sua simplicidade, deixam sempre aquele desejo de aprender mais e nos faz acreditar numa educação de qualidade. Neda, obrigada por ter inspirado tanta gente, pelas conversas, pelo carinho e por sua amizade.

Ao Sandro e a Silvia, que sempre compreenderam a necessidade e a importância que o estudo tem pra mim, me liberando sempre que precisei. Aos demais colegas da Sandro Representações fica o meu agradecimento.

Aos meus demais amigos e professores, não caberia neste espaço, citar o nome de todos que me ajudaram nesta etapa, e em todos os anos de faculdade, portanto meus amigos, o meu agradecimento. Obrigada a todos que insistiram para que eu fosse até o final!

Os investimentos em conhecimento geram os melhores dividendos. (*Benjamin Franklin*)

## RESUMO

Neste trabalho, teve-se como principal objetivo analisar o crescimento populacional do país e como objetivos específicos: construir modelos matemáticos para descrever o crescimento populacional brasileiro e estimar a população futura utilizando os dados dos censos demográficos no período de 1872 a 2010 disponibilizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Atualmente temos diversos modelos que tentam medir a população para anos futuros, no entanto, neste estudo dirigimos a análise para cinco modelos: linear, exponencial e polinomial dentro da ótica numérica, malthusiano e logístico dentro da ótica analítica. Na literatura acadêmica as equações diferenciais ordinárias são amplamente utilizadas em estudos populacionais. Utilizamos o modelo logístico, pois tem por característica crescimento limitado pela capacidade de suporte do sistema. A validação dos modelos obtidos foi feita através da comparação gráfica do uso do coeficiente de correlação de Pearson. Para isso utilizamos o sistema de computação algébrica e simbólica Maple, Microsoft Excel, Curve Expert e Blue Bit. Nessa comparação gráfica o modelo polinomial de grau quatro mostrou-se o mais adequado no período. O crescimento ocorre até o ano de 2035 onde atinge o máximo de 211,5 milhões de pessoas a seguir decresce até que a partir de 2084 a população é negativa. Nos anos em que o Censo Demográfico já foi feito podemos ver, que com exceção do modelo linear, todos os modelos apresentaram coeficiente de correlação maior que 0,99. Nas análises futuras o único modelo que apresentou o coeficiente de correlação maior que 0,9 foi o polinomial. A divisão desse trabalho tem por base os passos da modelagem matemática de interação, “matematização” e validação dos modelos. A fundamentação matemática de cada modelo proposto está detalhada e aplicada para o problema em questão. Por fim, os resultados não sustentaram a hipótese empírica de que o modelo logístico descreveria melhor o futuro populacional, devido ao fato que será necessário uma pesquisa maior a respeito do parâmetro de capacidade de suporte do sistema. Temos então que para as estimativas futuras os modelos linear e exponencial são os que melhor se aproximam da estimativa proposta pela IBGE.



## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 – Processo de Modelagem Matemática                           | 14 |
| Figura 2 – População nos Censos Demográficos – 1872/1920              | 18 |
| Figura 3 – População nos Censos Demográficos – 1940/1970              | 19 |
| Figura 4 – População nos Censos Demográficos – 1980/2010              | 20 |
| Figura 5 – Crescimento populacional Censo do IBGE 1872/2010           | 24 |
| Figura 6 – Modelo linear (Excel)                                      | 27 |
| Figura 7 – Modelo linear (Maple)                                      | 28 |
| Figura 8 – Modelo exponencial (Excel)                                 | 29 |
| Figura 9 – Modelo exponencial (Maple)                                 | 31 |
| Figura 10 – Modelo polinomial grau 3 (Excel)                          | 34 |
| Figura 11 – Modelo polinomial grau 3 (Maple)                          | 35 |
| Figura 12 – Modelo polinomial grau 4 (Excel)                          | 36 |
| Figura 13 – Modelo polinomial grau 4.(Maple)                          | 38 |
| Figura 14 – Modelo polinomial de terceiro grau, melhor modelo (Maple) | 40 |
| Figura 15 – Modelo polinomial de quarto grau, melhor modelo (Maple)   | 41 |
| Figura 16 – Modelo malthusiano (Maple)                                | 44 |
| Figura 17 – Modelo logístico (Maple)                                  | 47 |
| Figura 18 – Representação de todos os modelos avaliados.              | 48 |
| Figura 19 – Representação gráfica dos modelos e estimativas futuras.  | 49 |

## LISTA DE TABELAS

|   |    |
|---|----|
| Tabela 1 – Censo Demográfico Brasileiro                                   | 21 |
| Tabela 2 – Estimativas da população: 2011/2050                            | 21 |
| Tabela 3 – Dados Censo (Período 1872-2010)                                | 24 |
| Tabela 4 – Cálculo para o ajuste linear                                   | 26 |
| Tabela 5 – Cálculo para o ajuste exponencial                              | 29 |
| Tabela 6 – Análise do melhor modelo polinomial de terceiro grau           | 39 |
| Tabela 7 – Análise do melhor modelo polinomial de quarto grau             | 41 |
| Tabela 8 – Estudo de taxas de crescimento relativas                       | 44 |
| Tabela 9 – Validação dos modelos  | 48 |
| Tabela 10 – Estimativa dos modelos comparados a estimativa do IBGE (2008) | 50 |

## SUMÁRIO

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. INTRODUÇÃO</b>                                  | <b>12</b> |
| <b>2. MODELAGEM MATEMÁTICA - UMA RÁPIDA ABORDAGEM</b> | <b>13</b> |
| <b>3. CENSO DEMOGRÁFICO</b>                           | <b>16</b> |
| 3.1 O que é o Censo Demográfico?                      | 16        |
| 3.2 Dados históricos                                  | 16        |
| 3.3 Dados coletados para o estudo                     | 21        |
| 3.4 Apresentação do problema a ser estudado           | 21        |
| <b>4. FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA</b>                    | <b>23</b> |
| 4.1 Fundamentação Numérica                            | 23        |
| <b>4.1.1 Método dos Mínimos Quadrados</b>             | <b>23</b> |
| 4.1.1.1 <i>Ajuste Linear</i>                          | 25        |
| 4.1.1.2 <i>Ajuste Exponencial</i>                     | 28        |
| 4.1.1.3 <i>Ajuste Polinomial</i>                      | 31        |
| <b>4.1.1.3.1 Polinômio Grau 3</b>                     | <b>33</b> |
| <b>4.1.1.3.2 Polinômio Grau 4</b>                     | <b>36</b> |
| 4.1.1.4 <i>Observação de estudo dos polinômios</i>    | 38        |
| 4.2 Fundamentação Analítica                           | 42        |
| <b>4.2.1 Modelo de Malthusiano</b>                    | <b>42</b> |
| <b>4.2.2 Modelo Logístico</b>                         | <b>44</b> |
| 4.3 Validação dos dados                               | 47        |
| <b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>                        | <b>53</b> |
| 5.1 Trabalhos futuros                                 | 54        |
| <b>REFERÊNCIAS</b>                                    | <b>56</b> |

## 1. INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como principal foco analisar o crescimento populacional do país que teve uma queda significativa nos últimos anos. Em face dessa constatação com base nos dados levantados no IBGE (2008) e com técnicas de modelagem matemática foi feita uma análise do comportamento da população buscando um modelo que possa descrever populações já mensuradas e também que possa prever populações futuras. Para isso utilizamos o sistema de computação algébrica Maple, Microsoft Excel, Curve Expert e Bue Bit. A literatura identifica diversos padrões para explicar o crescimento populacional e também como estimar a população futura. Este estudo está voltado, fundamentalmente, em investigar um modelo que represente o crescimento populacional embasado em: Biembengut, Bassanezi, Burden, Chapra e Bender.

Com esse propósito em mente, o trabalho foi assim organizado: após esta breve introdução, no capítulo dois foi feita uma rápida abordagem do que se trata a modelagem matemática, seus passos sequenciais que fizeram com que os demais capítulos deste estudo pudessem ser desenvolvidos. No capítulo três começa o estudo em torno da familiarização com o tema da pesquisa, a situação problema que direciona para este trabalho, e já traz a tona os dados e as principais tendências da população. Esses dados serão utilizados de forma detalhada a partir do capítulo quatro. No quarto capítulo apresentamos os cálculos, fundamentação numérica (ajustes linear, exponencial e polinomial) e também a fundamentação analítica (modelos malthusiano e logístico). Estes estudos, acerca da dinâmica populacional é de grande relevância e está se tornando cada vez mais frequente pelo fato que têm apontado o risco de uma super população. Além disso, seu caráter interdisciplinar e sua importância para os órgãos públicos, na tomada de decisões, que assim como os Censos buscam retratar o país e visam melhorias para população. No entanto, observamos uma tendência a estabilidade e até mesmo ao decréscimo da população, já que caminhamos ao encontro de um país de idosos. Por fim, nas considerações finais são resumidas as principais conclusões do trabalho e as intenções de estudos futuros a partir deste.

## 2. MODELAGEM MATEMÁTICA - UMA RÁPIDA ABORDAGEM

O termo *modelo* de acordo com o dicionário Aurélio (versão *on line* Beta) traz no significado da palavra vários aspectos. Aqui iremos reproduzir somente a parte de interesse para este trabalho. A expressão *modelo*, no âmbito matemático: “Modelo matemático, representação matemática de um fenômeno físico, humano, etc., feita para que se possa melhor estudar o original.”. Neste trabalho, o foco é justamente trabalhar com esta definição de modelagem, a modelagem matemática. Incrementando a ideia poderíamos ainda adicionar: representação de fenômenos e previsão de novos fenômenos ou propriedades, tendo por base leis, equações, variáveis, que em geral são testadas experimentalmente.

Podemos resumir o ‘ato’ da modelagem matemática como um processo dinâmico, conforme publicação de Oliveira<sup>1</sup>:

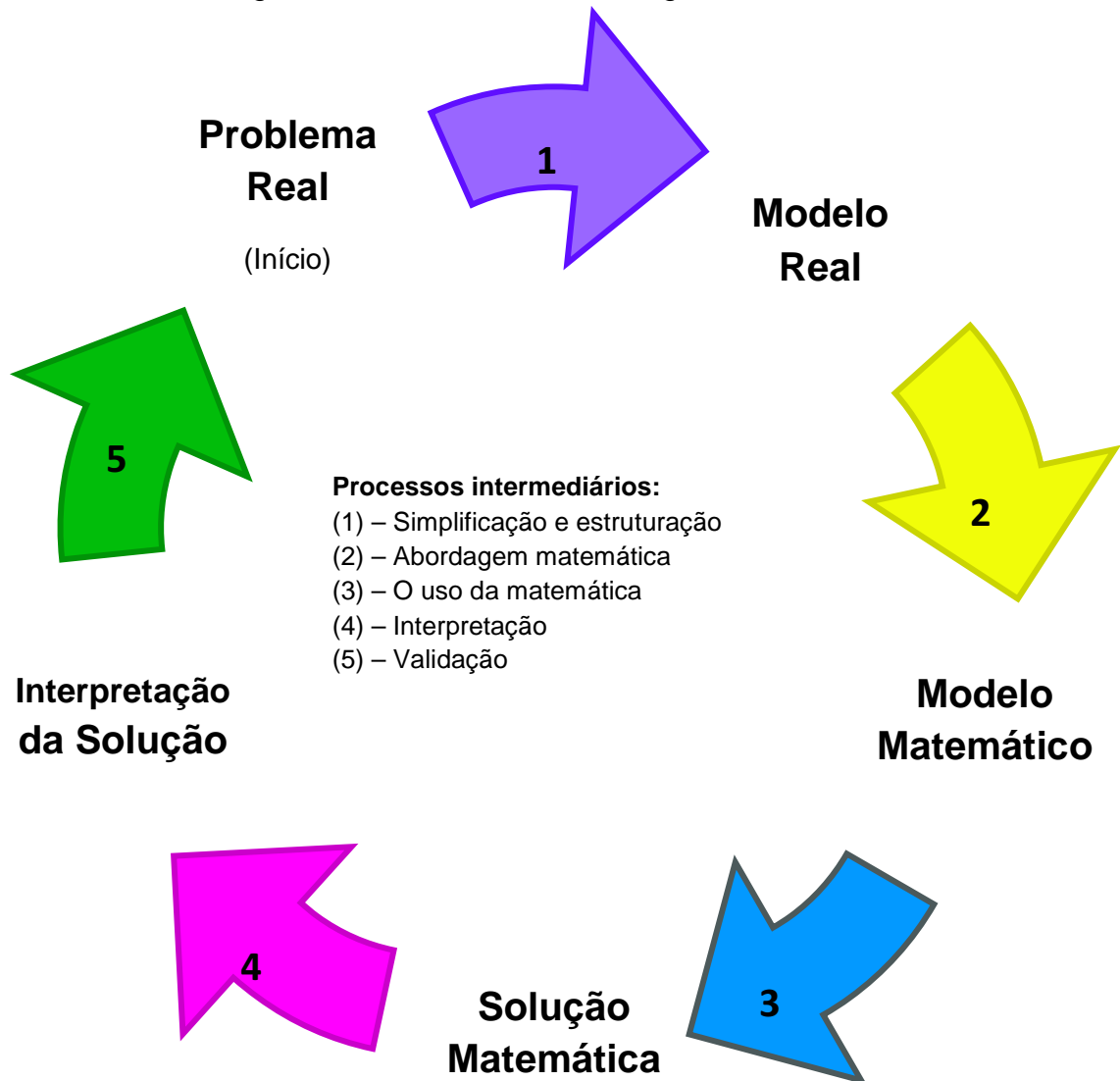
[...] pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a final. Nesse sentido, realidade (origem da situação inicial) e Matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão fundamentados) são domínios diferentes que passam a se integrar, e, em diferentes momentos, conhecimentos matemáticos e não matemáticos são acionados e/ou produzidos e integrados. A esta situação inicial problemática a literatura costuma se referir como situação-problema; à situação final desejada é associada, de modo geral, uma representação matemática, um modelo matemático (OLIVEIRA, 2011 apud ALMEIDA; 2010, p.399).

É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências e isso se resume numa atividade criativa, de validação, aplicação e aperfeiçoamento dos modelos encontrados. Tudo isso envolve várias etapas que sugerem uma sequência de passos para o desenvolvimento da modelagem. Abaixo segue um fluxograma para entendermos como funciona este processo cognitivo.

---

<sup>1</sup> OLIVEIRA, Camila Fogaça. Apucarana – PR. Aspectos epistemológicos da previsão de fenômenos: um estudo usando modelagem matemática, 2011. 3 p.

Figura 1 – Processo de Modelagem Matemática



Fonte: Autora.

Este modelo parte de uma situação-problema real no qual, através de hipóteses idealizadas e simplificadas, deve ser ‘matematizada’, ou seja, surge então a necessidade de relacionar os dados coletados com artifícios matemáticos, acarretando num modelo matemático. A partir disso é alcançada a solução matemática a qual poderá ser validada ou não, o que faz com que retorne o processo inicial de forma a analisar os dados novamente. Tomando por base Biembengut (2011)<sup>2</sup> podemos resumir estes passos em três grupos:

<sup>2</sup> Biembengut, Maria Salett. São Paulo. Modelagem matemática no ensino. 2011.

- ✓ Interação: familiarização com o problema.
- ✓ Matematização: formulação do problema (hipóteses), resolução.
- ✓ Modelo Matemático: interpretação da solução, validação.

Para este trabalho seguimos os passos citados acima, de forma que a primeira etapa ocorreu de forma quase que simultânea com a segunda (formulação do problema) visto que ao coletar os dados demográficos do Censo no site do IBGE, surgiu então o questionamento que norteou o objetivo deste estudo que se resume em encontrar um modelo que estime a população brasileira para os próximos anos.

### **3.CENSO DEMOGRÁFICO**

#### **3.1 O que é o Censo Demográfico?**

O site do IBGE, instituto que tem registrado todos os dados do recenseamento populacional até o momento, esclarece o que é o Censo.

“O Censo Demográfico é uma pesquisa realizada pelo IBGE a cada dez anos. Através dele, reunimos informações sobre toda a população brasileira.

Nosso primeiro Censo aconteceu em 1872 e recebeu o nome de Recenseamento da População do Império do Brasil. O mais recente foi o Censo 2010, [...]. Antes dele, o IBGE realizou o Censo 2000.

No Censo, os pesquisadores do IBGE visitam todos os domicílios do país para aplicar um questionário. Depois de percorrer todos os cantos do Brasil, indo de casa em casa, os pesquisadores organizam e analisam as informações coletadas nos questionários. Em seguida, divulgam os resultados em uma série de publicações sobre os temas estudados.

Os resultados do Censo Demográfico são importantes para a sociedade ter informações atualizadas sobre a população e para o governo planejar suas ações de forma mais adequada.”<sup>3</sup>

O Censo Demográfico retrata a população e com o resultado é possível acompanhar a evolução ao longo do tempo. É a principal fonte de dados através da qual é possível criar estratégias e tomar de decisões sobre investimentos em áreas importantes como Educação, Saúde, Cultura e Infraestrutura. É a mais completa operação estatística realizada por um país.

#### **3.2 Dados históricos**

O Censo é uma atividade desafiadora tendo em vista a complexidade de mensurar um país tão vasto quanto o Brasil. Este estudo que é feito desde o período imperial traz como principal objetivo conhecer e melhorar nosso país.

Foi após a Revolução Industrial, que as necessidades de uma melhor atividade censitária se fez necessária e junto disso, novas metodologias foram implantadas. Dessa forma, surgia o sistema estatístico no qual Inglaterra, França e Alemanha são precursores.

---

<sup>3</sup> Fonte IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Sobre o IBGE. O que é o Censo? Disponível em: <<http://7a12.ibge.gov.br/sobre-o-ibge/o-que-e-censo>> Acesso: 25 de maio de 2013.



Na época do Brasil colônia a contagem populacional era realizada sem regularidade e não havia critérios bem definidos. Isso era função da igreja que por meio de seus registros contabilizava nascimentos, batismos e sepultamentos.

O Brasil era um país em construção, foi assim que ficou retratado após o levantamento nacional efetuado com a consolidação do governo de Dom Pedro II. Em 1872 surge a Diretoria Geral de Estatística (DGE) que realizou o primeiro Censo Demográfico Brasileiro no qual a população recenseada já se aproximava de 10 milhões de habitantes. Mais três Censos gerais foram realizados com a Proclamação da República, nos anos de 1890, 1900 e 1920. O crescimento nesse período foi intenso em razão do alto número de estrangeiros migrando para São Paulo e estados do Sul.

Uma nova era iniciou-se a partir do Censo de 1940, através do IBGE que qualificou profissionais para tal função. Com isso tornou-se modelo para outros países especialmente na América Latina. A população nesta época era predominantemente rural.

Com acentuada inflação, mergulhado em crises políticas e financeiras o IBGE teve dificuldades para realizar o Censo de 1990 culminando com adiamento para o ano seguinte.

Abaixo segue uma pequena citação a respeito dos demais Censos Demográficos a partir de então.

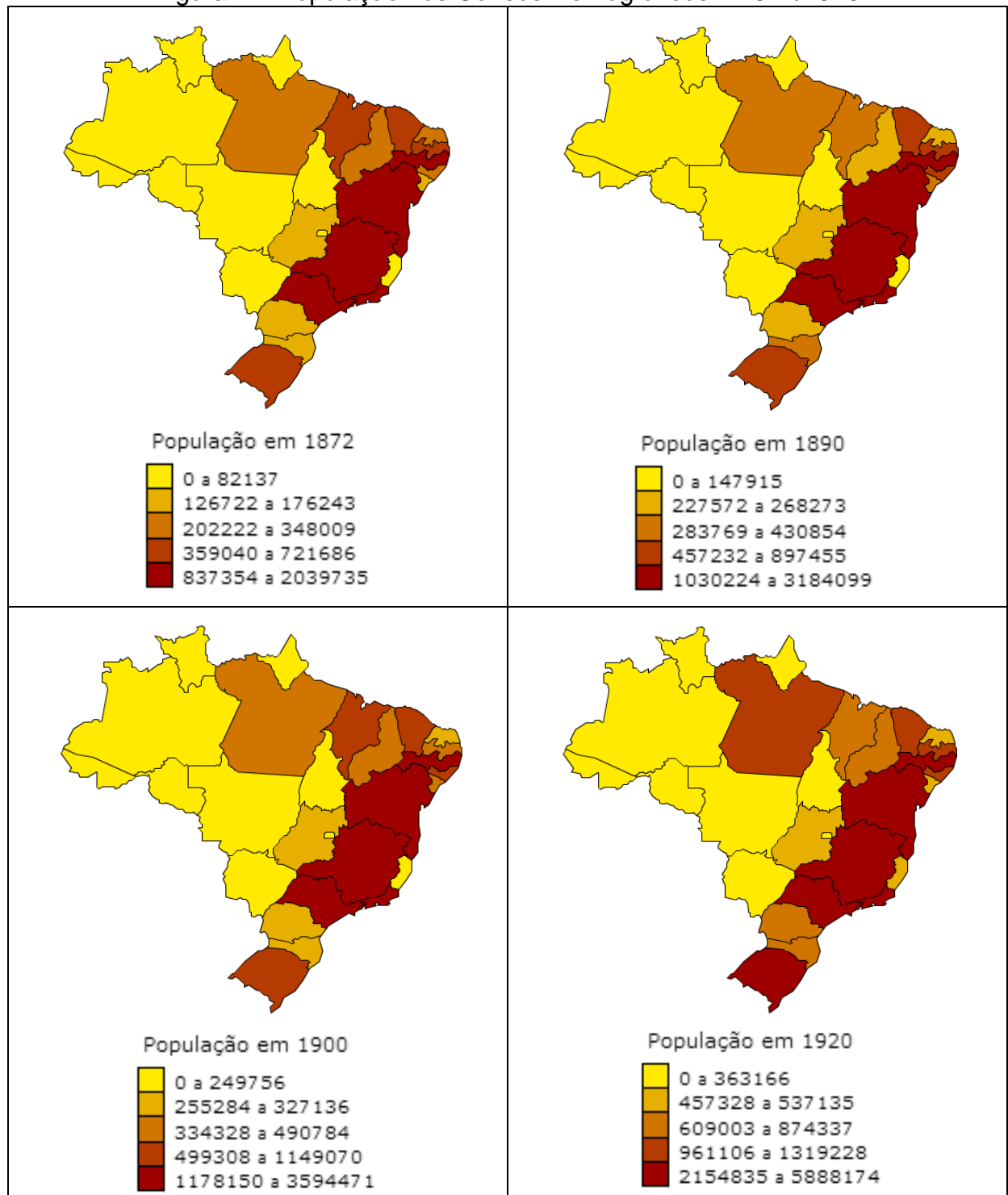
“Importante ressaltar que os Censos de 1980, 1991 e 2000 confirmaram o seu peculiar processo de transição demográfica, com rápido declínio dos níveis de fecundidade e de crescimento demográfico, aumento da esperança de vida, redução do tamanho da família e progressivo movimento de envelhecimento populacional.[...] Em 1991, foi estabelecida a caracterização específica da população indígena e, na comparação com os resultados do Censo 2000, estudos detalhados foram feitos sobre a evolução dessa população. Da mesma forma, a série censitária recente sobre a opção religiosa dos brasileiros vem revelando o crescimento das religiões- evangélicas e redução dos católicos. [...]”<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup> OLIVEIRA, Luiz Antonio Pinto de. O Brasil através do Censo. Disponível em: <<http://www.cartacapital.com.br/educacao/o-brasil-atraves-do-censo>>. Acesso em: 23 de maio de 2013.

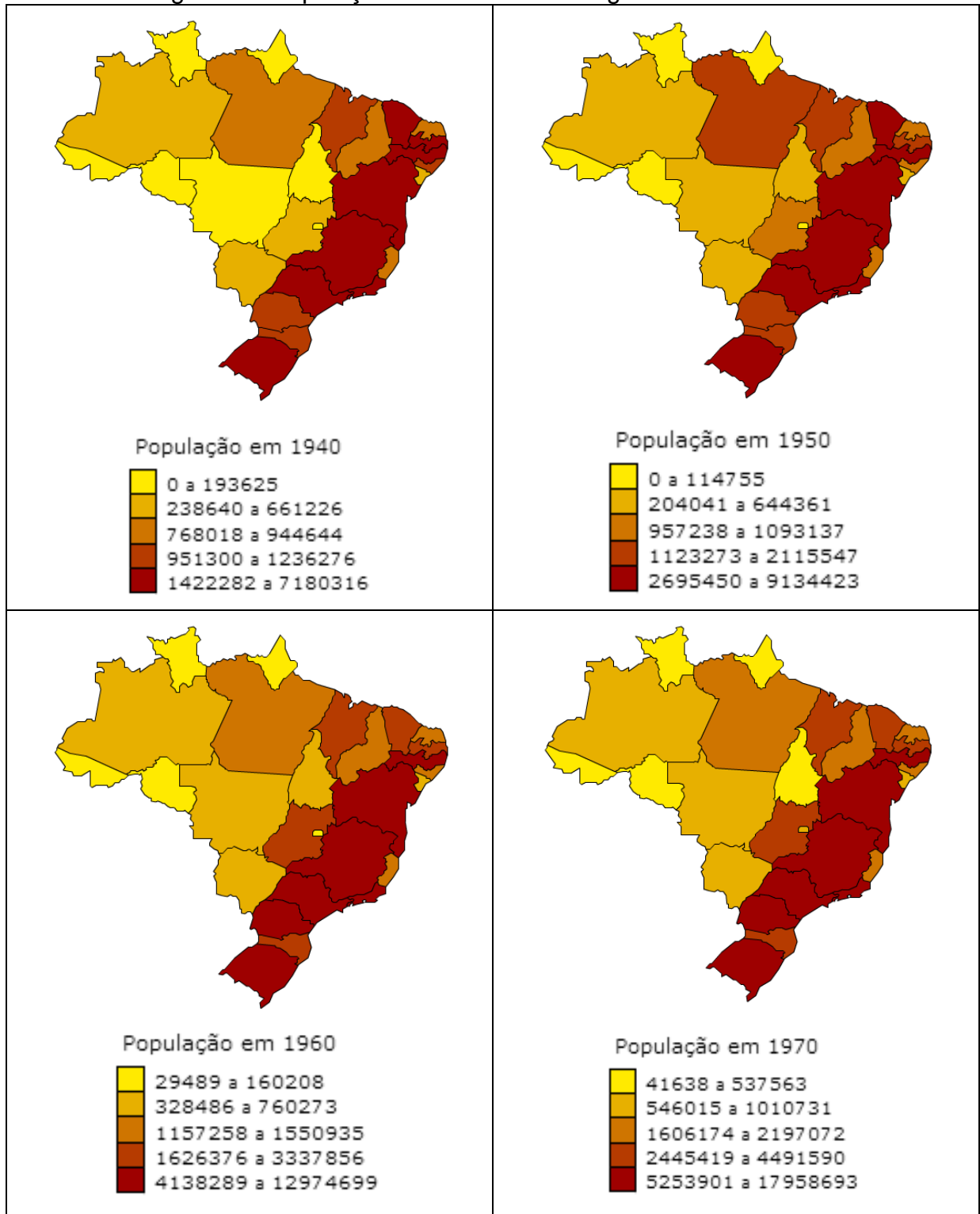
A partir do Censo de 2010 há uma constante atualização da população com aumento da informatização na coleta de dados já iniciada na contagem populacional de 2007. Abaixo seguem amostras das diferentes densidades da população brasileira nas grandes regiões e unidades da federação.

Figura 2 – População nos Censos Demográficos – 1872/1920



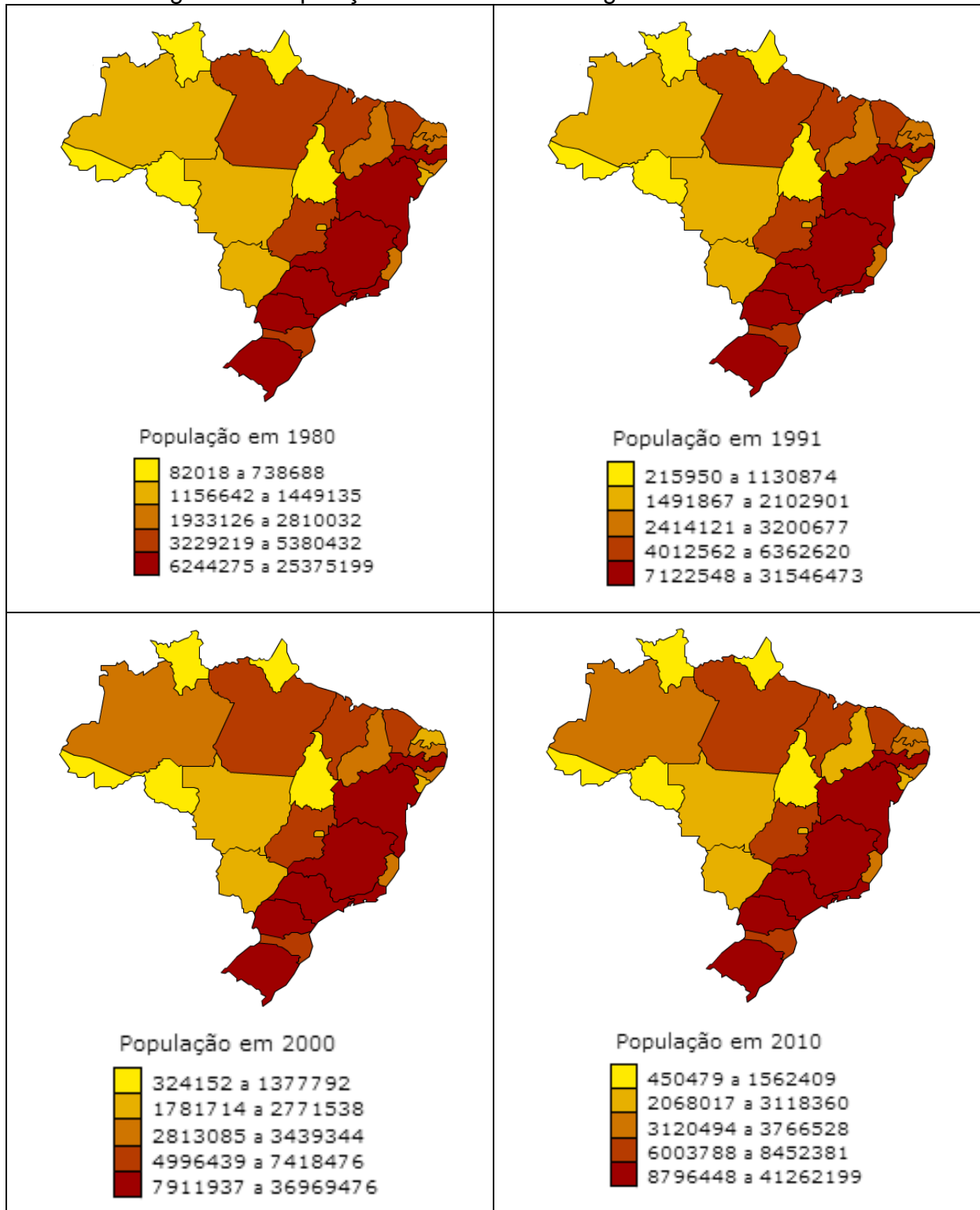
Fonte: IBGE, Censo Demográfico 1872, 1890, 1900, 1920.

Figura 3 – População nos Censos Demográficos – 1940/1970



Fonte: IBGE, Censo Demográfico 1940, 1950, 1960, 1970.

Figura 4 – População nos Censos Demográficos – 1980/2010



Fonte: IBGE, Censo Demográfico 1980, 1991, 2000, 2010.

### 3.3 Dados coletados para o estudo

Dados coletados do site do IBGE registram a população brasileira conforme tabela abaixo.

**Tabela 1. Censo Demográfico Brasileiro**

| Ano  | População | Ano  | População |
|------|-----------|------|-----------|
| 1872 | 9,9       | 1970 | 94,5      |
| 1890 | 14,3      | 1980 | 121,1     |
| 1900 | 17,4      | 1991 | 146,9     |
| 1920 | 30,6      | 1996 | 157,1     |
| 1940 | 41,2      | 2000 | 169,5     |
| 1950 | 51,9      | 2007 | 184,0     |
| 1960 | 70,2      | 2010 | 190,7     |

Fonte: IBGE (2013). População em milhões. (Adaptado pela autora).

A partir dos dados acima foi possível seguir com o processo de modelagem que será explanado nos capítulos a seguir.

### 3.4 Apresentação do problema a ser estudado

Com base no que fora apresentado e com as estimativas expostas pelo IBGE surge então à situação-problema motivadora do estudo desse trabalho, que é também buscar um modelo matemático que se ajuste aos dados e que possa estimar as populações futuras.

**Tabela 2. Estimativas da população: 2011/2050**

| Ano  | t (tempo) | População Estimada IBGE |
|------|-----------|-------------------------|
| 2011 | 139       | 194,9                   |
| 2012 | 140       | 196,5                   |
| 2013 | 141       | 198,0                   |
| 2014 | 142       | 199,5                   |
| 2015 | 143       | 200,9                   |
| 2016 | 144       | 202,2                   |
| 2017 | 145       | 203,5                   |
| 2018 | 146       | 204,7                   |
| 2019 | 147       | 206,0                   |
| 2020 | 148       | 207,1                   |
| 2021 | 149       | 208,3                   |
| 2022 | 150       | 209,4                   |
| 2023 | 151       | 210,4                   |
| 2024 | 152       | 211,4                   |

| <b>Ano</b>  | <b>t (tempo)</b> | <b>População Estimada<br/>IBGE</b> |
|-------------|------------------|------------------------------------|
| <b>2025</b> | 153              | 212,4                              |
| <b>2026</b> | 154              | 213,3                              |
| <b>2027</b> | 155              | 214,2                              |
| <b>2028</b> | 156              | 215,0                              |
| <b>2029</b> | 157              | 215,7                              |
| <b>2030</b> | 158              | 216,4                              |
| <b>2031</b> | 159              | 217,0                              |
| <b>2032</b> | 160              | 217,5                              |
| <b>2033</b> | 161              | 218,0                              |
| <b>2034</b> | 162              | 218,3                              |
| <b>2035</b> | 163              | 218,6                              |
| <b>2036</b> | 164              | 218,9                              |
| <b>2037</b> | 165              | 219,0                              |
| <b>2038</b> | 166              | 219,1                              |
| <b>2039</b> | 167              | 219,1                              |
| <b>2040</b> | 168              | 219,1                              |
| <b>2041</b> | 169              | 219,0                              |
| <b>2042</b> | 170              | 218,8                              |
| <b>2043</b> | 171              | 218,5                              |
| <b>2044</b> | 172              | 218,2                              |
| <b>2045</b> | 173              | 217,9                              |
| <b>2046</b> | 174              | 217,5                              |
| <b>2047</b> | 175              | 217,0                              |
| <b>2048</b> | 176              | 216,5                              |
| <b>2049</b> | 177              | 215,9                              |
| <b>2050</b> | 178              | 215,3                              |

Fonte: IBGE. 2008. (Adaptado pela autora).

A tabela 2 foi adaptada para o nosso estudo e seus dados foram retirados dos arquivos disponibilizados pelo IBGE.

## 4. FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

A análise matemática das técnicas utilizadas foram baseadas nos autores: Biembengut, Bassanezi, Burden, Chapra e Bender.

### 4.1 Fundamentação Numérica

A análise numérica deste trabalho começou através da análise feita utilizando o programa *Excel*, o qual permite trabalhar com dados tabelados e dessa forma sendo possível inserir gráficos de dispersão e linhas de tendência diversas às quais também já fornecem informações sobre as equações que as determinam. Com os resultados e as simulações numéricas esperamos chegar ao objetivo deste trabalho que foca buscar o melhor modelo para estimar a população futura. As validações dos modelos serão feitas em conjunto ao final do capítulo.

#### 4.1.1 Método dos Mínimos Quadrados

O método dos mínimos quadrados é uma técnica de otimização matemática que procura encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados experimentais, isto é, encontrar os parâmetros de uma específica função de ajustamento, minimizando o somatório dos quadrados dos resíduos. (Resíduo é a diferença entre o valor obtido experimentalmente e o valor estimado pela equação de ajustamento ou de regressão).<sup>5</sup>

Com os dados da Tabela 1 foi possível relacionar os anos ( $t$ ) e a população ( $P$ ), de forma a obter dados para que se possamos encontrar a curva que melhor se ajuste aos dados.

Tomamos por base o ano inicial, o qual chamamos de ano zero ou ainda tempo zero, o ano de 1872 pelo simples fato de ser o primeiro ano em que se tem registro do número de habitantes no Brasil. Depois disso efetuamos os cálculos para

---

<sup>5</sup> STEFFENS, Cesar Augusto; VEIT, Eliane Angela; SILVEIRA, Fernando Lang da.. **Textos de apoio ao professor de física:** Uma introdução ao processo da medição no ensino médio. Porto Alegre, 2008. Disponível em: <[http://www.if.ufrgs.br/public/tapf/v19n2\\_Steffens\\_Veit\\_Silveira.pdf](http://www.if.ufrgs.br/public/tapf/v19n2_Steffens_Veit_Silveira.pdf)>. Acesso em: 26 abril 2013.

obtermos o tempo  $t$ , diminuindo o ano subsequente do ano zero sucessivamente até o ano de 2010.

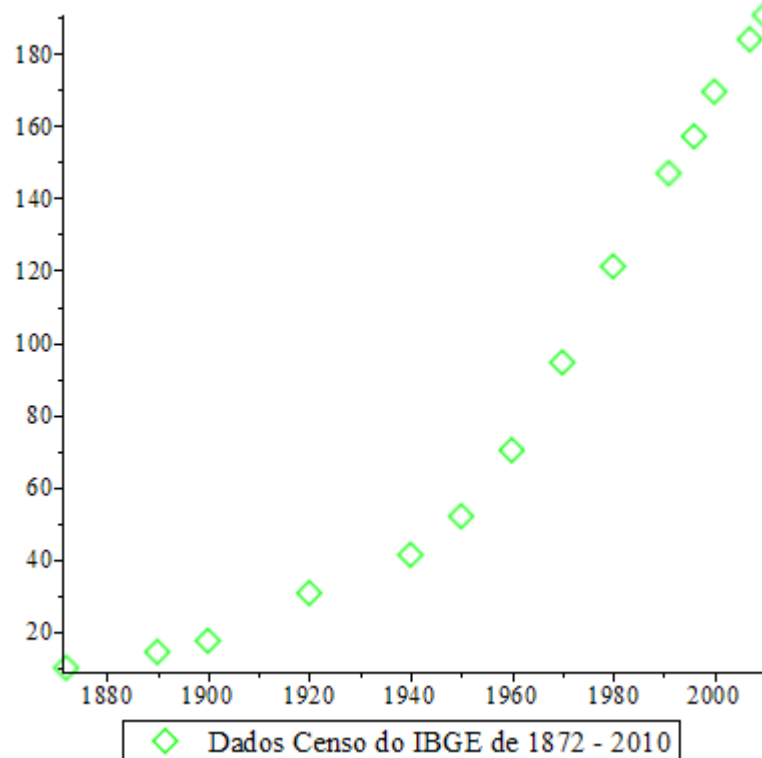
Assim, registramos todas essas informações conforme pode ser visto na tabela que segue.

**Tabela 3. Dados Censo. (Período 1872-2010)**

| Ano  | Tempo (t) | População | Ano  | Tempo (t) | População |
|------|-----------|-----------|------|-----------|-----------|
| 1872 | 0         | 9,9       | 1970 | 98        | 94,5      |
| 1890 | 18        | 14,3      | 1980 | 108       | 121,1     |
| 1900 | 28        | 17,4      | 1991 | 119       | 146,9     |
| 1920 | 48        | 30,6      | 1996 | 124       | 157,1     |
| 1940 | 68        | 41,2      | 2000 | 128       | 169,5     |
| 1950 | 78        | 51,9      | 2007 | 135       | 184,0     |
| 1960 | 88        | 70,2      | 2010 | 138       | 190,7     |

Fonte dos dados: IBGE. (Adaptado pela autora, valores arredondados considerar milhões).

Figura 5 – Crescimento populacional Censo do IBGE 1872/2010.



Fonte: Autora utilizando *Maple*. (2013)



#### 4.1.1.1 Ajuste Linear

Partindo da Tabela 3, podemos iniciar o estudo do melhor ajuste linear (que também é um polinômio de grau um) que descreva os resultados nela obtidos. Pela Figura 6 é notável que não há possibilidade de traçar uma reta que passe exatamente sobre todos os pontos, já que os mesmos não estão alinhados.

Com os valores da Tabela 3 medidos para a população ( $P$ ) em função do tempo ( $t$ ), queremos encontrar a reta que melhor ajuste os dados, no sentido dos quadrados mínimos. A função de ajuste terá a forma:

$$P(t) = a_0 + a_1 t . \quad (01)$$

Pelo critério dos Mínimos Quadrados é necessário que:

$$F = \sum_{i=0}^n (P_i - p_i)^2 = \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 t_i - p_i)^2 \quad (02)$$

seja mínimo.

Sendo  $F$  uma função de duas variáveis,  $a_0$  e  $a_1$ , o menor valor de  $F$  será obtido através de:

$$\frac{\delta F}{\delta a_0} = 0; \quad \frac{\delta F}{\delta a_1} = 0 \quad (03)$$

e assim:

$$\frac{\delta F}{\delta a_0} = 0, \quad \sum_{i=0}^n 2(a_0 + a_1 t_i - p_i) = 0 \quad (04)$$

e

$$\frac{\delta F}{\delta a_1} = 0, \quad \sum_{i=0}^n 2(a_0 + a_1 t_i - p_i) t_i = 0 \quad (05)$$

Construímos o sistema de duas equações e duas variáveis:

$$\begin{cases} 2 \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 t_i - p_i) = 0 \\ 2 \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 t_i - p_i) t_i = 0 \end{cases} \quad (06)$$

ou

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n p_i = \sum_{i=0}^n a_0 + \sum_{i=0}^n a_1 t_i \\ \sum_{i=0}^n t_i p_i = \sum_{i=0}^n a_0 t_i + \sum_{i=0}^n a_1 t_i^2 \end{cases} \quad (07)$$

Obtemos:

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + a_1 \sum_{i=0}^n t_i = \sum_{i=0}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n t_i + a_1 \sum_{i=0}^n t_i^2 = \sum_{i=0}^n t_i p_i \end{cases} \quad (08)$$

Resolvendo-se este último sistema linear, são obtidos os valores de  $a_0$  e  $a_1$  e assim determina-se a função de ajuste:

$$P = a_0 + a_1 t. \quad (01)$$

Aplicando a teoria acima para encontrar o melhor ajuste linear para o estudo em questão iniciaremos o estudo com a tabela que segue:

**Tabela 4. Cálculo para o ajuste linear**

| i        | t <sub>i</sub> | p <sub>i</sub> | t <sub>i</sub> p <sub>i</sub> | t <sub>i</sub> <sup>2</sup> | P <sub>i</sub>   | (P <sub>i</sub> -p <sub>i</sub> ) <sup>2</sup> |
|----------|----------------|----------------|-------------------------------|-----------------------------|------------------|--|
| 0        | 0              | 9,9            | 0,00                          | 0                           | -24,9447         | 1214,1522                                      |
| 1        | 18             | 14,3           | 257,40                        | 324                         | 0,2442           | 197,5643                                       |
| 2        | 28             | 17,4           | 487,20                        | 784                         | 14,2381          | 9,9976   |
| 3        | 48             | 30,6           | 1468,80                       | 2304                        | 42,2258          | 135,1591                                       |
| 4        | 68             | 41,2           | 2801,60                       | 4624                        | 70,2135          | 841,7831                                       |
| 5        | 78             | 51,9           | 4048,20                       | 6084                        | 84,2073          | 1043,7648                                      |
| 6        | 88             | 70,2           | 6177,60                       | 7744                        | 98,2012          | 784,0672                                       |
| 7        | 98             | 94,5           | 9261,00                       | 9604                        | 112,1951         | 313,1148                                       |
| 8        | 108            | 121,1          | 13078,80                      | 11664                       | 126,1889         | 25,8969  |
| 9        | 119            | 146,9          | 17481,10                      | 14161                       | 141,5821         | 28,2797  |
| 10       | 124            | 157,1          | 19476,68                      | 15376                       | 148,5791         | 72,0960  |
| 11       | 128            | 169,5          | 21696,00                      | 16384                       | 154,1766         | 234,8065                                       |
| 12       | 135            | 184,0          | 24837,30                      | 18225                       | 163,9723         | 400,3081                                       |
| 13       | 138            | 190,7          | 26316,60                      | 19044                       | 168,1705         | 507,5805                                       |
| <b>∑</b> | <b>1178</b>    | <b>1299,25</b> | <b>147388,28</b>              | <b>126322</b>               | <b>1299,2500</b> | <b>5808,5708</b>                               |

Fonte: Autora utilizando *Excel*, (2013)

Seja  $P(t) = a_0 + a_1 t$  a função que ajusta os dados. Os parâmetros  $a_0$  e  $a_1$  constituem a solução do sistema:

$$\begin{aligned}\sum p_i &= (n+1)a_0 + a_1 \sum t_i \\ \sum t_i p_i &= a_0 \sum t_i + a_1 \sum t_i^2\end{aligned}\quad (09)$$

Utilizando os dados da Tabela 4, é possível chegar a:

$$\Rightarrow \begin{cases} 14a_0 + 1178a_1 = 1299,5 \\ 1178a_0 + 126322a_1 = 147388,28 \end{cases}\quad (10)$$

Depois dos cálculos algébricos chegamos a conclusão que:

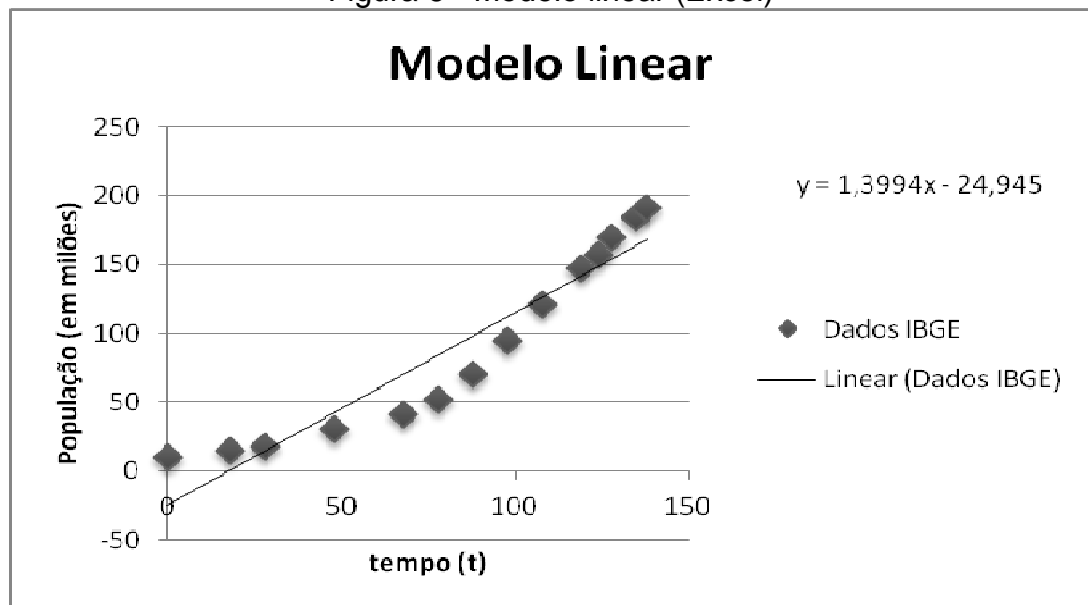
$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = -24,9447 \\ a_1 = 1,3994 \end{cases}\quad (11)$$

E dessa forma temos que o modelo linear que se melhor se ajusta aos dados fornecidos é dado pela equação:

$$P = 1,3994t - 24,9447\quad (12)$$

Com os dados do *Excel* foi possível representar os pontos (dados do IBGE), a reta que define o modelo linear que melhor se ajusta e ainda a solução proposta pelo próprio *Excel* isso pode ser verificado conforme mostra a figura abaixo.

Figura 6 - Modelo linear (Excel)

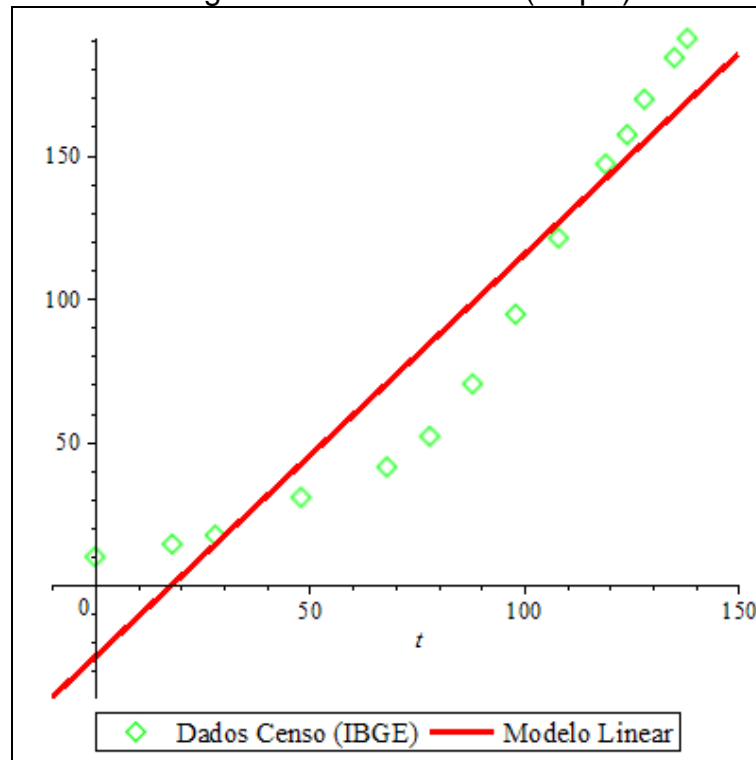


Fonte: Autora utilizando *Excel* (2013).

Pode-se observar que a equação (12) comparada à equação fornecida pelo *Excel* não teve diferença significativa, sobretudo ficou definido a utilização de quatro casas decimais com a finalidade de padronização do, portanto, o modelo para análise dos dados será feito através da equação (12).

Após, feito o estudo no Excel levamos os dados para o Maple, programa o qual permite uma melhor representação gráfica dos modelos. Na figura abaixo os pontos verdes não pertencentes à curva correspondem aos dados originais dos Censos do IBGE, enquanto que a curva esboçada em vermelho corresponde ao gráfico da função linear encontrada na equação (12).

Figura 7 - Modelo linear (Maple)



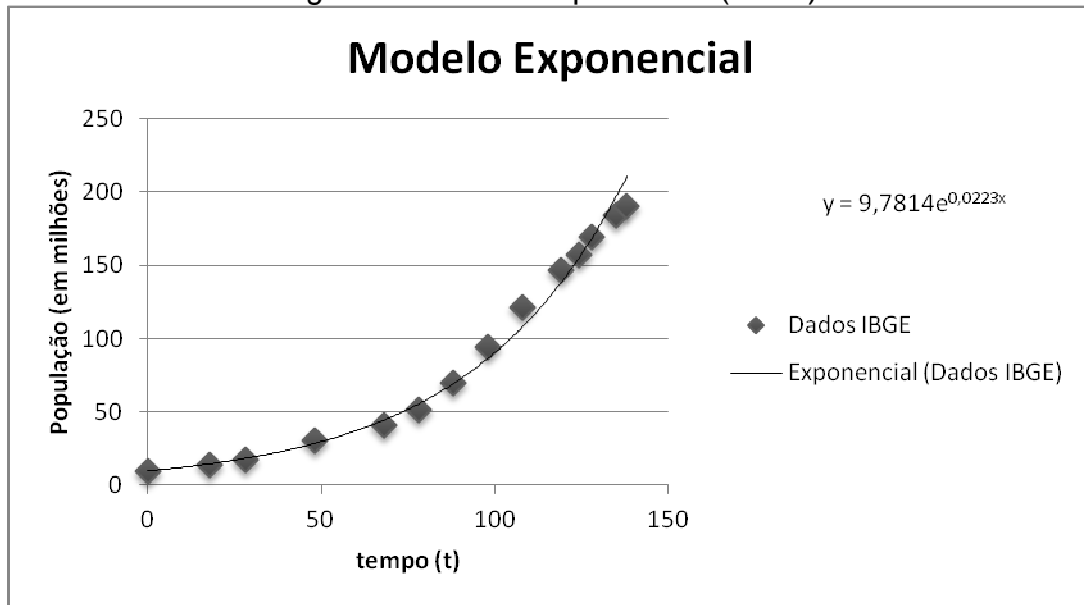
Fonte: Moschoutis, via *Maple*. (2013)

É claro que o ajuste linear não é bom para modelar dados demográficos, uma vez que esta curva é ilimitada superiormente. Toda população tende a estabilidade depois de certo intervalo de tempo. No entanto, o procedimento de ajuste estudado acima serve para fins de comparação com os modelos que serão apresentados nas próximas subseções.

#### 4.1.1.2 Ajuste Exponencial

Similarmente efetuamos a primeira análise com o Excel para efeito de comparação.

Figura 8 - Modelo exponencial (Excel)



Fonte: Autora utilizando Excel (2013).

Agora faremos o ajuste dos pontos da tabela tempo x população, a uma exponencial do tipo  $p = ab^t$ . Essa função pode ser ajustada através da seguinte transformação:

$$\ln p = \ln(\alpha e^{bt}) = \ln \alpha + bt \quad (13)$$

Fazendo  $P = \ln p$  e  $a = \ln \alpha$  reduzimos o problema de ajustar a tabela de pontos  $(x_i, p_i)$  referente a uma exponencial ao problema de ajustar a tabela de pontos  $(x_i, P_i)$ , onde:  $P_i = \ln p_i$ , à equação de uma reta  $P = a + bt$ .

Partindo para os cálculos através dos dados já conhecidos apresentamos a tabela abaixo.

Tabela 5. Cálculo para o ajuste exponencial.

| i | $t_i$ | $y_i$ | $\ln p_i$ | $t_i \ln p_i$ | $t_i^2$ |
|---|-------|-------|-----------|---------------|---------|
| 0 | 0     | 9,9   | 2,2925    | 0             | 0       |
| 1 | 18    | 14,3  | 2,6603    | 47,8847       | 324     |
| 2 | 28    | 17,4  | 2,8565    | 79,9812       | 784     |
| 3 | 48    | 30,6  | 3,4210    | 164,2080      | 2304    |
| 4 | 68    | 41,2  | 3,7184    | 252,8538      | 4624    |
| 5 | 78    | 51,9  | 3,9493    | 308,0469      | 6084    |
| 6 | 88    | 70,2  | 4,2513    | 374,1187      | 7744    |
| 7 | 98    | 94,5  | 4,5486    | 445,7628      | 9604    |
| 8 | 108   | 121,1 | 4,7966    | 518,0346      | 11664   |

| <b>i</b>  | <b>t<sub>i</sub></b> | <b>y<sub>i</sub></b> | <b>ln p<sub>i</sub></b> | <b>t<sub>i</sub> ln p<sub>i</sub></b> | <b>t<sub>i</sub><sup>2</sup></b> |
|-----------|----------------------|----------------------|-------------------------|---------------------------------------|----------------------------------|
| <b>9</b>  | 119                  | 146,9                | 4,9898                  | 593,7805                              | 14161                            |
| <b>10</b> | 124                  | 157,1                | 5,0567                  | 627,0298                              | 15376                            |
| <b>11</b> | 128                  | 169,5                | 5,1329                  | 657,0052                              | 16384                            |
| <b>12</b> | 135                  | 184,0                | 5,2148                  | 704,0017                              | 18225                            |
| <b>13</b> | 138                  | 190,7                | 5,2507                  | 724,5968                              | 19044                            |
| <b>∑</b>  | <b>1178</b>          | <b>1299,25</b>       | <b>58,1394</b>          | <b>5497,3044</b>                      | <b>126322</b>                    |

Fonte: Autora utilizando *Excel*, (2013)

Fazendo o ajuste linear nas variáveis *a* e *b*:

$$\begin{aligned} \sum p_i &= (n+1)a + b \sum t_i \\ \sum t_i p_i &= a \sum t_i + b \sum t_i^2 \end{aligned} \quad (14)$$

De forma semelhante ao já apresentado anteriormente teremos:

$$\Rightarrow \begin{cases} 14a + 1178b = 58,1394 \\ 1178a + 126322b = 5497,3044 \end{cases} \quad (15)$$

Resolvendo o sistema:

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2,2805 \\ b = 0,0223 \end{cases} \quad (16)$$

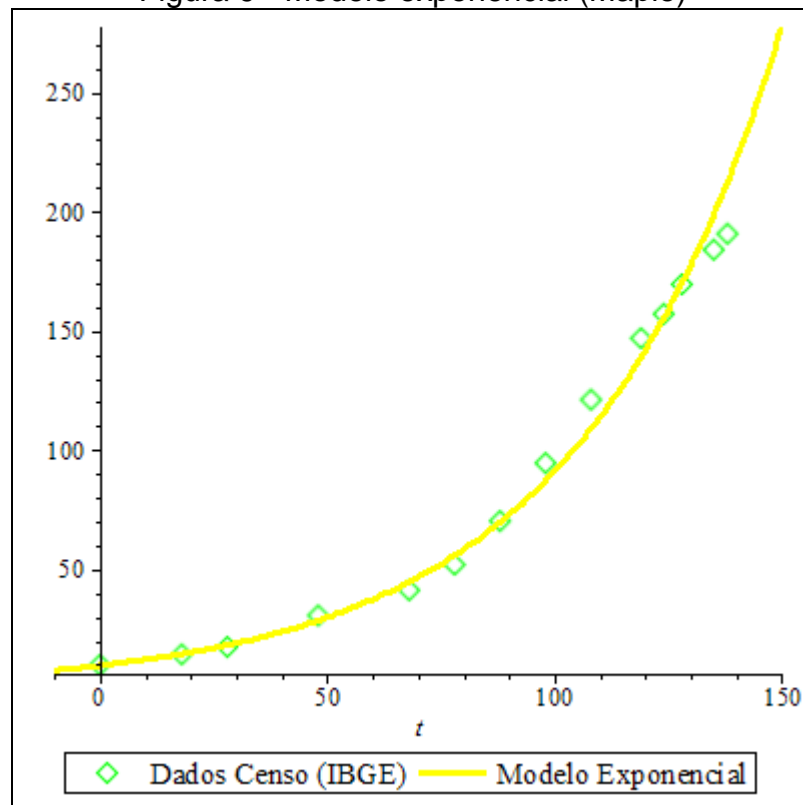
Como  $a = \ln \alpha$  então  $\alpha = \ln a \Rightarrow \alpha = e^a \Rightarrow e^{2,2805} \Rightarrow a = 9,7814$ . Assim, de forma análoga a representação do modelo anterior, temos que o ajuste exponencial é determinado pela equação:

$$y = 9,7814e^{0,0223t} \quad (17)$$

Abaixo seguimos com a representação gráfica do modelo exponencial sobre os pontos de estudo. Semelhantemente a figura 8 os pontos verdes não pertencentes à curva correspondem aos dados originais dos censos, enquanto que a curva esboçada em amarelo corresponde ao gráfico da função exponencial encontrada acima.

Observemos que, visualmente, a curva encontrada ajusta-se melhor aos dados quando comparado ao ajuste precedente. No entanto, assim como no ajuste linear, o ajuste feito acima também não é eficiente para modelar dados demográficos, pelo mesmo motivo já citado anteriormente.

Figura 9 - Modelo exponencial (Maple)



Fonte: Autora utilizando *Maple*. (2013)

#### 4.1.1.3 Ajuste Polinomial

Conforme os resultados disponíveis na *Projeção da População do Brasil por Sexo e por Idade – 1950/2050 Revisão 2008*<sup>6</sup>, o ajuste compreendido entre os anos 2000 e 2030 é feito através de um polinômio de terceiro grau, por esse motivo e também de forma empírica (por acreditar que este seria um forte candidato ao melhor ajuste) incluímos este modelo no estudo.

Abaixo segue a fundamentação teórica para determinar, por mínimos quadrados, os coeficientes de um polinômio qualquer.

Podemos encontrar uma aproximação  $p(t)$  para a função desconhecida que define os  $n$  pontos. Seja  $p(t)$  o polinômio:

$$p(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_mt^m \quad (18)$$

Uma condição necessária sobre o valor dos coeficientes  $a_k$  para que

<sup>6</sup> Fonte: IBGE: *Projeção da População do Brasil por Sexo e por Idade - 1950-2050 Revisão 2008*. 2011.

$$Q = \sum_{i=1}^n \left( f_i - \sum_{j=0}^m a_j t_i^j \right)^2 \quad (19)$$

seja mínimo é

$$\frac{\partial Q}{\partial a_k} = 0 \quad (20)$$

para  $k=0, 1, 2 \dots m$ . Isto implica as equações

$$2 \sum_{i=1}^n \left( f_i - \sum_{j=0}^m a_j t_i^j \right) t_i^k = 0 \quad (21)$$

para cada  $k = 0, 1, \dots, m$ , pois

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \left( \sum_{j=0}^m a_j t_i^j \right) = \frac{\partial}{\partial a_k} (a_0 + a_1 t_i + \dots + a_k t_i^k + \dots + a_m t_i^m) = t_i^k \quad (22)$$

A equação acima pode ser reescrita como:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m (a_j t_i^{j+k}) = \sum_{i=1}^n f_i t_i^k$$

$$\sum_{j=0}^m \left( \sum_{i=1}^n (t_i^{j+k}) \right) a_j = \sum_{i=1}^n f_i t_i^k$$

para cada  $k = 0, 1, \dots, m$ , ou seja, um sistema de  $m + 1$  equações lineares cujas incógnitas são os  $m + 1$  coeficientes  $a_i$  do polinômio  $p(t)$ .

O sistema de equações pode ser convenientemente descrito em notação matricial como

$$T^T T a = T^T f \quad (23)$$

Onde

$$T = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^m \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^m \end{bmatrix} \quad (24)$$

$T^T$  é sua transposta,



$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad (25)$$

e

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (26)$$

As equações dadas pelo sistema são denominadas equações normais. Essa nomenclatura deve-se ao seguinte fato: o sistema (23) pode ser escrito como:

$$T^T (Ta - f) = 0 \quad (27)$$

o vetor entre parênteses,  $(Ta - f)$  é o vetor cujas componentes são dadas pelos resíduos da aproximação e, segundo a equação anterior esse vetor é normal (ortogonal) aos vetores formados pelos elementos das linhas da matriz  $T^T$  que são da forma:

$$\begin{bmatrix} t_1^l \\ t_2^l \\ \vdots \\ t_n^l \end{bmatrix} \text{ para } l = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (28)$$

#### 4.1.1.3.1 Polinômio Grau 3

De igual forma aos modelos anteriores, com os dados inseridos no *Excel*, foi possível efetuar uma rápida análise do modelo de terceiro grau proposto pelo IBGE.

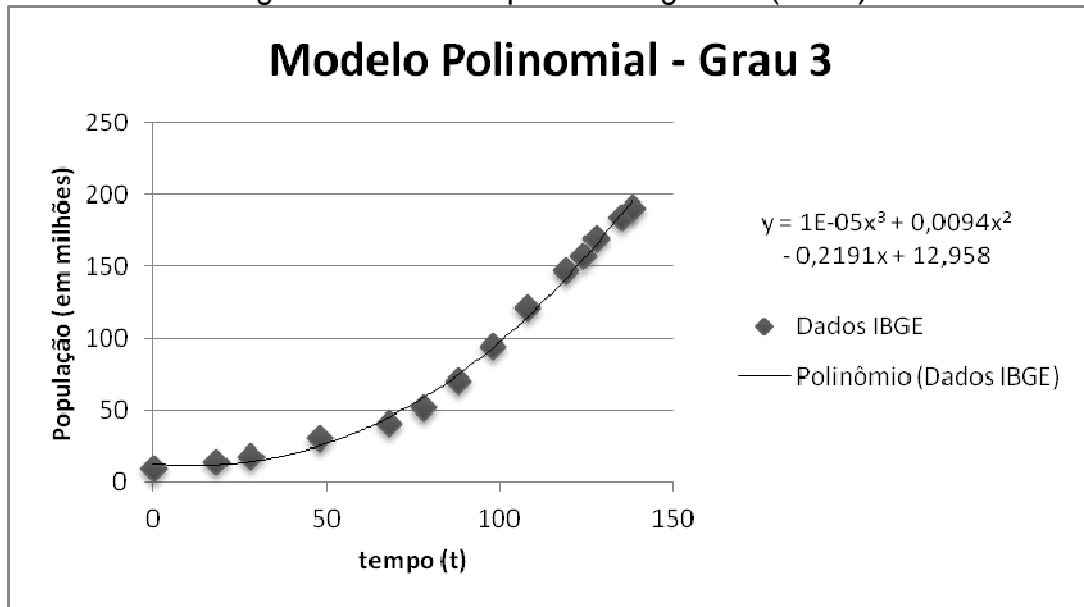
Abaixo temos a equação gerada através da linha de tendência para o polinômio<sup>7</sup> e também a representação gráfica feita no *Excel*.

$$P_3(t) = 0,000001t^3 + 0,0094t^2 - 0,2191t + 12,958 \quad (28)$$

---

<sup>7</sup> O Excel só efetua cálculos com polinômios de no máximo sexto grau o que não era necessário para o problema. Como os dados também foram testados no Curve Expert e o mesmo verificou que se tratando de ajustar os dados através de polinômios o grau que melhor se ajusta é de quarto grau. Como o IBGE em sua publicação informa que utiliza polinômio de grau três incluímos neste estudo a análise de ambos.

Figura 10 - Modelo polinomial grau 3. (Excel)



Fonte: Autora utilizando *Excel*

Fazendo valer a teoria para encontrar um polinômio qualquer efetuamos os cálculos matriciais necessários para chegar à equação que será apresentada a seguir, a partir dos dados censitários temos:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 18 & 324 & 5832 \\ 1 & 28 & 784 & 21952 \\ 1 & 48 & 2304 & 110592 \\ 1 & 68 & 4624 & 314432 \\ 1 & 78 & 6084 & 474552 \\ 1 & 88 & 7744 & 681472 \\ 1 & 98 & 9604 & 941192 \\ 1 & 108 & 11664 & 1259712 \\ 1 & 119 & 14161 & 1685159 \\ 1 & 124 & 15376 & 1906624 \\ 1 & 128 & 16384 & 2097152 \\ 1 & 135 & 18225 & 2460375 \\ 1 & 138 & 19044 & 2628072 \end{bmatrix}_{14 \times 4}$$

$$f = \begin{bmatrix} 9,9 \\ 14,3 \\ 17,4 \\ 30,6 \\ 41,2 \\ 51,9 \\ 70,2 \\ 94,5 \\ 121,1 \\ 146,9 \\ 157,1 \\ 169,5 \\ 184,0 \\ 190,7 \end{bmatrix}_{14 \times 1}$$

$$, a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

Efetuando a multiplicação temos:

$$T^T \cdot f = \begin{bmatrix} 1299 \\ 147388 \\ 17715936 \\ 2187090102 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$$

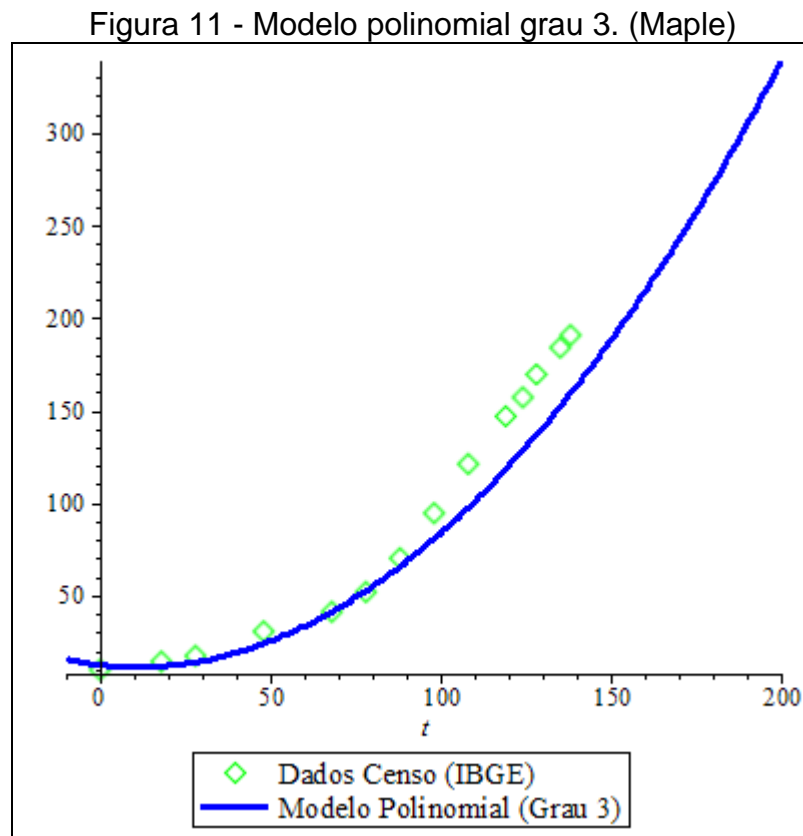
Considerando quatro dígitos decimais a solução do sistema será:

$$T^T T \cdot a = T^T f \Rightarrow a = \begin{bmatrix} 12.7562 \\ -0.2095 \\ 0.0092 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

E assim chegamos à expressão de grau três que melhor modela os dados:

$$P_3(t) = 12,7562 - 0,2095t + 0,0092t^2 + 0,0000t^3 \quad (29)$$

Abaixo segue a representação gráfica do modelo polinomial conforme equação (29) acima.



Fonte: Autora utilizando Maple.

Notemos que, o ajuste acima se comparado ao anterior também não é o melhor, iremos verificar melhor a validade destes modelos ao analisar os coeficientes de correlação no final do capítulo.

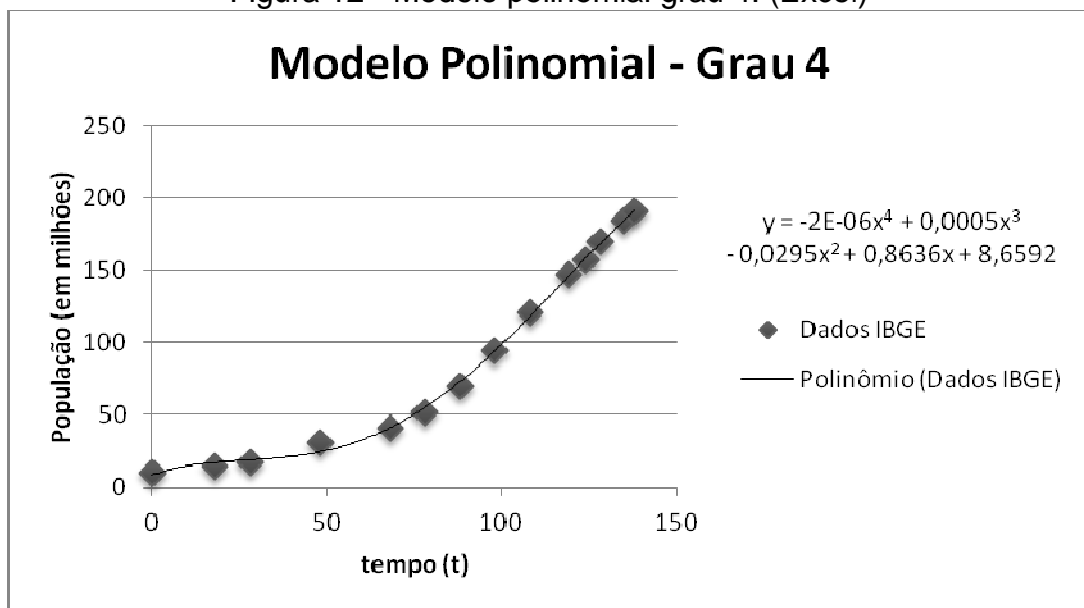
#### 4.1.1.3.2 Polinômio Grau 4

De maneira semelhante ao polinômio de grau três foi feita a análise para o polinômio de quarto grau. Obtivemos primeiramente o resultado do *Excel* seguido do método matricial apresentado no início desta subseção. Abaixo apresentamos inicialmente o resultado do *Excel*. A equação que determina a linha de tendência:

$$P_4(t) = -0,0000002t^4 + 0,0005t^3 - 0,0295t^2 + 0,8636t + 8,6592 \quad (30)$$

E a representação gráfica:

Figura 12 - Modelo polinomial grau 4. (Excel)



Fonte: Autora utilizando *Excel*.

A seguir as matrizes geradas a partir dos valores da tabela de população.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 18 & 324 & 5832 & 104976 \\ 1 & 28 & 784 & 21952 & 614656 \\ 1 & 48 & 2304 & 110592 & 5308416 \\ 1 & 68 & 4624 & 314432 & 21381376 \\ 1 & 78 & 6084 & 474552 & 37015056 \\ 1 & 88 & 7744 & 681472 & 59969536 \\ 1 & 98 & 9604 & 941192 & 92236816 \\ 1 & 108 & 11664 & 1259712 & 136048896 \\ 1 & 119 & 14161 & 1685159 & 200533921 \\ 1 & 124 & 15376 & 1906624 & 236421376 \\ 1 & 128 & 16384 & 2097152 & 268435456 \\ 1 & 135 & 18225 & 2460375 & 332150625 \\ 1 & 138 & 19044 & 2628072 & 362673936 \end{bmatrix}_{14 \times 5}, \quad f = \begin{bmatrix} 9,9 \\ 14,3 \\ 17,4 \\ 30,6 \\ 41,2 \\ 51,9 \\ 70,2 \\ 94,5 \\ 121,1 \\ 146,9 \\ 157,1 \\ 169,5 \\ 184,0 \\ 190,7 \end{bmatrix}_{14 \times 1}, \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}_{5 \times 1}$$

Efetuando as operações:

$$T^T \cdot f = \begin{bmatrix} 1299 \\ 147388 \\ 17715936 \\ 2187090102 \\ 274742329541 \end{bmatrix}$$

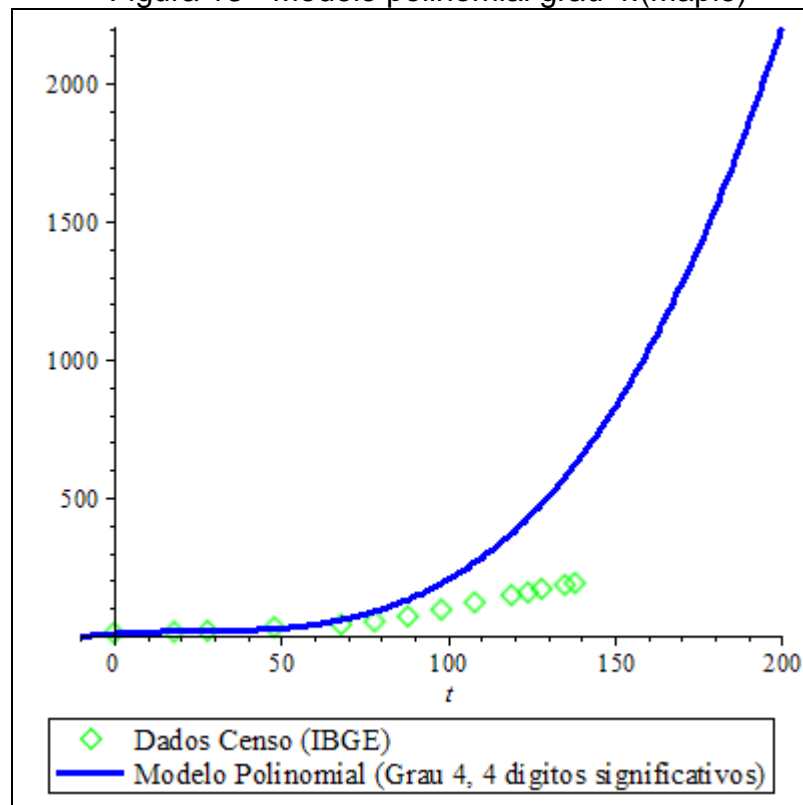
Resolvendo o sistema linear abaixo encontramos os coeficientes (com quatro dígitos decimais) do nosso modelo polinomial de quarto grau.

$$T^T T \cdot a = T^T f \Rightarrow a = \begin{bmatrix} 8,4383 \\ 0,8781 \\ -0,0295 \\ 0,0004 \\ 0,0000 \end{bmatrix}$$

$$P_4(t) = 8,4383 + 0,8781t - 0,0295t^2 + 0,0004t^3 + 0,0000t^4 \quad (31)$$

Abaixo segue a representação gráfica feita através do Maple.

Figura 13 - Modelo polinomial grau 4.(Maple)



Fonte: Autora utilizando *Maple*

Analisando os dois polinômios graus três e quatro gerados através dos cálculos das matrizes foi possível notar que o número de casas decimais utilizadas acabou por reduzir o polinômio que era de grau de três para grau dois e o polinômio que era de grau quatro para grau três. Os modelos que inicialmente eram ditos fortes candidatos a ter o melhor ajuste não atenderam as expectativas observando-os graficamente. Buscando obter um novo modelo para ambos os graus, de maneira que seus resultados sejam satisfatórios, efetuamos testes computacionais que fez surgir então a ideia de incluir a subseção a seguir.

#### 4.1.1.4 Observação de estudo dos polinômios

Na padronização inicial deste trabalho decidimos utilizar quatro casas decimais, no entanto, observamos que para o modelo polinomial ter validade foi necessário efetuar diferentes testes cada um deles aumentando o número de dígitos decimais, ou seja, diminuindo o acúmulo de erro de arredondamento. Já que de forma empírica acreditávamos que este modelo deveria ter o melhor ajuste em

relação aos apresentados anteriormente. Abaixo mostramos os estudos feitos até chegarmos a um resultado satisfatório.

Utilizamos seis e quinze dígitos decimais que serão expostos a seguir.

Para o polinômio de grau três temos abaixo os resultados dos coeficientes considerando:

✓ Seis dígitos:

$$P_3(t) = 12,756207 - 0,209469t + 0,009225t^2 + 0,000014t^3 \quad (32)$$

✓ Quinze dígitos:

$$P_3(t) = 12.756206704595800 - 0.209469113347935t + 0.009224773369477t^2 + 0.000013839327280t^3 \quad (33)$$

De forma a avaliar qual resultado empregar, segue abaixo a tabela para análise do coeficiente de correlação de Pearson que irá definir o melhor modelo polinomial de terceiro grau. Este coeficiente vai validar dos dados. Ele é limitado aos seguintes valores:  $0 \leq r^2 \leq 1$ . Quanto mais próximo de 1 for o valor de  $r^2$ , melhor será o ajuste.

**Tabela 6. Análise do melhor modelo polinomial de terceiro grau**

| Ano  | t (tempo) | Dados IBGE | Polinômio Grau 3 com: |                   |                   |
|--|-----------|------------|-----------------------|-------------------|-------------------|
|  |           |            | 4 DÍGITOS             | 6 DÍGITOS         | 15 DÍGITOS        |
| 1872   | 0         | 9,9        | 12,8                  | 12,8              | 12,8              |
| 1890   | 18        | 14,3       | 12,0                  | 12,1              | 12,1              |
| 1900   | 28        | 17,4       | 14,1                  | 14,4              | 14,4              |
| 1920   | 48        | 30,6       | 23,9                  | 25,5              | 25,5              |
| 1940   | 68        | 41,2       | 41,1                  | 45,6              | 45,5              |
| 1950   | 78        | 51,9       | 52,4                  | 59,2              | 59,1              |
| 1960   | 88        | 70,2       | 65,6                  | 75,3              | 75,2              |
| 1970   | 98        | 94,5       | 80,6                  | 94,0              | 93,8              |
| 1980   | 108       | 121,1      | 97,4                  | 115,4             | 115,2             |
| 1991   | 119       | 146,9      | 118,1                 | 142,1             | 141,8             |
| 1996   | 124       | 157,1      | 128,2                 | 155,3             | 155,0             |
| 2000   | 128       | 169,5      | 136,7                 | 166,4             | 166,1             |
| 2007   | 135       | 184,0      | 152,1                 | 187,0             | 186,6             |
| 2010   | 138       | 190,7      | 159,1                 | 196,3             | 195,9             |
| <b>Coefficiente de correlação (<math>r^2</math>)</b> |           |            | <b>0,99757443</b>     | <b>0,99783579</b> | <b>0,99783575</b> |

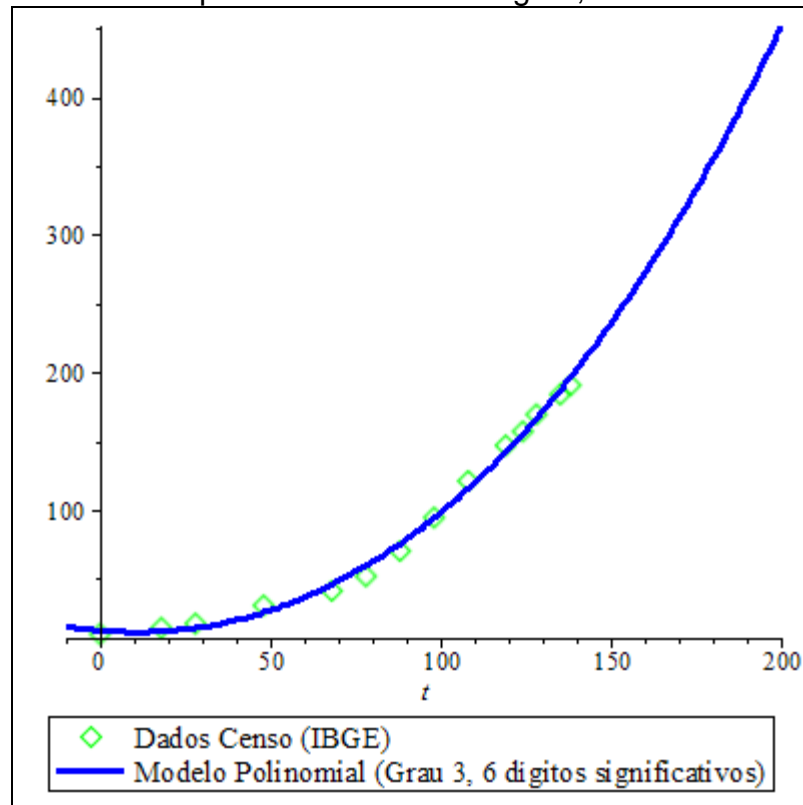
Fonte: Autora utilizando *Excel*.

Notemos que para o polinômio de terceiro grau só tivemos somente diferença a partir do oitavo dígito do coeficiente de correlação, isso comparando os

modelos de seis e quinze dígitos decimais, por fim, elegemos então a equação (32) para analisar junto dos demais modelos ao final deste capítulo.

Segue a representação gráfica do polinômio (32).

Figura 14 - Modelo polinomial de terceiro grau, melhor modelo. (Maple)



Fonte: Autora utilizando Maple.

De forma similar, fazendo a mesma análise para o polinômio de quarto grau temos que com:

✓ Seis dígitos, nossa nova expressão será dada por:

$$P_4(t) = 8.438319 + 0,878110t - 0,029804t^2 + 0,000462t^3 - 0.000002t^4 \quad (34)$$

✓ Quinze dígitos, nossa nova expressão será dada por:

$$P_4(t) = 8.438318688262470 + 0,878110134401968t - 0,029804099083666t^2 + 0,000462146247447t^3 - 0.000001614482654t^4 \quad (35)$$

Na tabela 7 apresentamos os resultados obtidos a partir da equação 35 o melhor modelo dentre os três modelos polinomiais de quarto grau estudados aqui nesta seção.



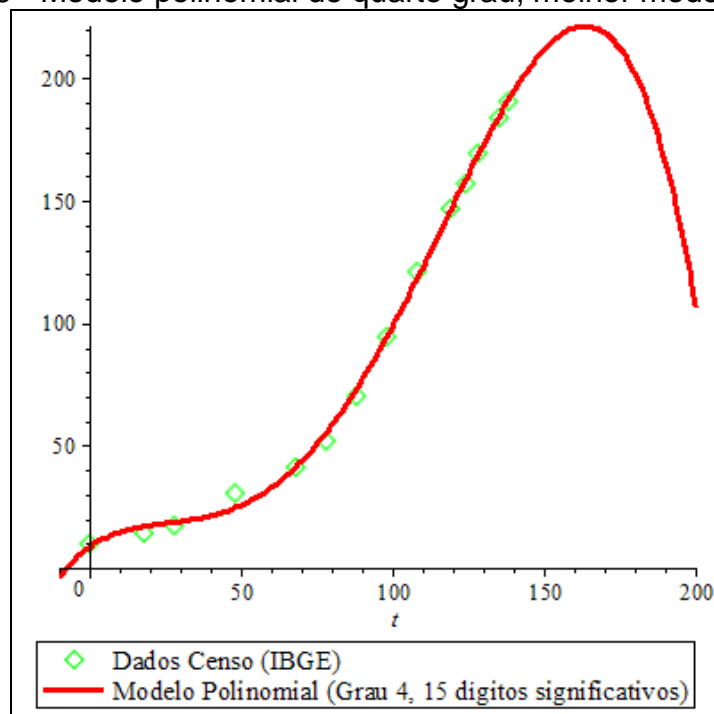
**Tabela 7. Análise do melhor modelo polinomial de quarto grau**

| Ano  | t<br>(tempo) | Dados IBGE | Polinômio Grau 4 |
|--|--------------|------------|------------------|
|  |              |            | 15 DÍGITOS       |
| 1872   | 0            | 9,9        | 8,4              |
| 1890   | 18           | 14,3       | 17,1             |
| 1900   | 28           | 17,4       | 18,8             |
| 1920   | 48           | 30,6       | 24,5             |
| 1940   | 68           | 41,2       | 41,1             |
| 1950   | 78           | 51,9       | 55,2             |
| 1960   | 88           | 70,2       | 73,0             |
| 1970   | 98           | 94,5       | 94,3             |
| 1980   | 108          | 121,1      | 118,2            |
| 1991   | 119          | 146,9      | 145,9            |
| 1996   | 124          | 157,1      | 158,5            |
| 2000   | 128          | 169,5      | 168,3            |
| 2007   | 135          | 184,0      | 184,6            |
| 2010   | 138          | 190,7      | 191,1            |
| <b>Coefficiente de correlação (<math>r^2</math>)</b> |              |            | <b>0,9993</b>    |

Fonte: Autora utilizando *Excel*.

A partir da tabela acima podemos nomear o polinômio (35) como o que melhor se adéqua ao nosso modelo. É visto por seu coeficiente de correlação na tabela acima que este é um modelo que reproduz de forma eficaz os dados em questão. Abaixo a representação gráfica do modelo.

Figura 15 - Modelo polinomial de quarto grau, melhor modelo. (Maple)



Fonte: Autora utilizando Maple.

Em síntese, para ficarmos apenas com um polinômio para analisar no final deste trabalho escolhemos o polinômio pelo mesmo critério já utilizado – o coeficiente de correlação, enfim o nosso modelo polinomial que se ajusta com coeficiente de correlação mais próximo de um é o polinômio de  $r^2=0,9993$  que é definido pela equação (35).

## 4.2 Fundamentação Analítica

### 4.2.1 Modelo de Malthusiano

Com essa citação abaixo feita por Thomas Malthus no seu “*Ensaio Sobre o Princípio da População*” (1980) começaremos nosso estudo malthusiano a respeito do crescimento populacional.

“A potência da população é infinitamente maior do que a potência da terra na produção de subsistência para o homem. A população quando não controlada cresce a uma taxa geométrica. A subsistência só cresce a uma taxa aritmética. Um ligeiro conhecimento dos números mostrará a imensidão da primeira em relação a segunda (MALTHUS, 1980).”

Para fins de iniciar nosso estudo vamos denotar que  $P_t$  é o tamanho da população no instante  $t$  e que  $K$  é a taxa de crescimento. Dessa forma, a população é dada, em função da população anterior,  $t - 1$  pela relação:

$$P_t = KP_{t-1} \quad (36)$$

Subtraindo  $P_{t-1}$  em ambos os lados da equação acima e dividindo por  $\Delta t = 1$ , temos a razão incremental

$$\frac{P_t - P_{t-1}}{1} = KP_{t-1} - P_{t-1} \Rightarrow \frac{\Delta P_t}{\Delta t} = (K - 1)P_{t-1} \quad (37)$$

Fazendo o limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , temos a derivada da função a qual satisfaz a equação diferencial que segue abaixo:

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad (38)$$

onde,  $k \equiv K - 1$  é a taxa de crescimento da população. A equação é uma equação diferencial linear e tem por resultado:

$$\int \frac{dP(t)}{P(t)} = \int kP \Rightarrow \ln(P(t)) = kt + c_1 \Rightarrow e^{\ln(P(t))} = e^{kt} \cdot e^{c_1} \Rightarrow P(t) = c_2 e^{kt}$$

$$P(0) = 9,9 \Rightarrow c_2 e^{k \cdot 0} = 9,9 \Rightarrow P(t) = 9,9 e^{kt}$$

$$P(t) = P_0 e^{kt} \quad (39)$$

Aplicando ao nosso estudo de caso, temos o intervalo de 138 anos ( $t$ ) entre o primeiro e o último Censo e para que seja possível estimarmos ainda, é necessário verificar a taxa de crescimento durante este período.

Considerando dada a população inicial  $P(0) = P_0 = 9,9$ , o resultado é alcançado através da expressão:

$$\begin{cases} P_{t+1} = (1+k)P_t \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (40)$$

ou seja,

$$P_t = (k+1)^t P_0 \quad (41)$$

Assim, dados dois censos  $P_0$  e  $P_t$ , a taxa de crescimento demográfico em  $t$  anos é obtida, fazendo

$$(k+1)^t = P_t / P_0 \Rightarrow k = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1 \quad (42)$$

Com esses dados é possível calcular a taxa de crescimento média (relativa) tomando por base a população de  $P_0 = 9930478$  e  $P_{138} = 190732694$ ,  $k$  é dada por:

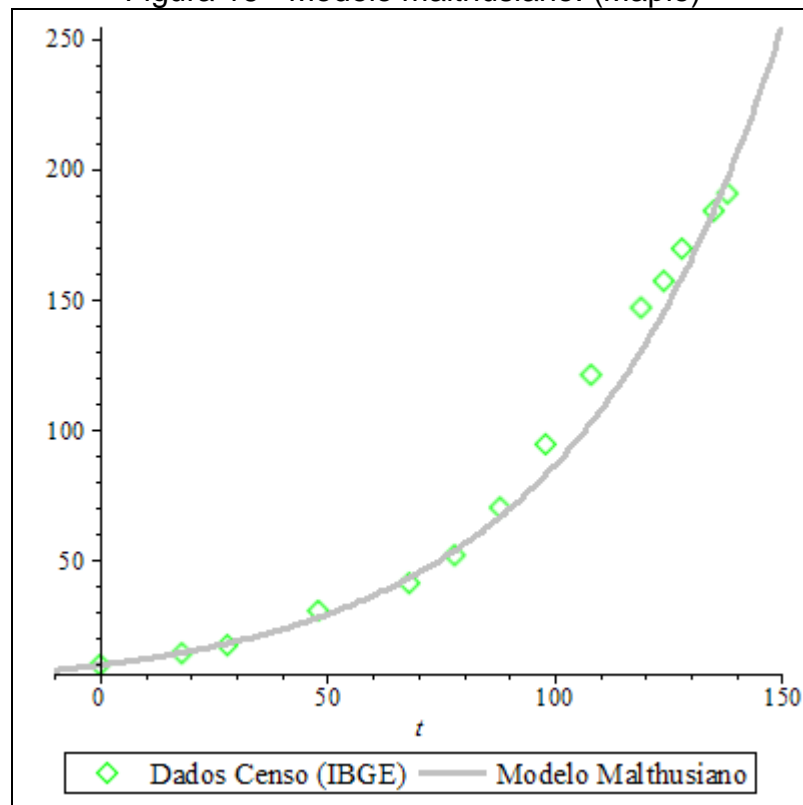
$$k = \sqrt[138]{\frac{190732694}{9930478}} - 1 = 0,021645904 \quad (43)$$

o que nos permite afirmar que a população brasileira cresceu a uma taxa média de, aproximadamente, 2,16% ao ano nestes 138 anos.

Com as informações reunidas é possível retomar a equação (39) e reescrevê-la.

$$P(t) = 9,9 e^{0,021645904t} \quad (44)$$

Figura 16 - Modelo malthusiano. (Maple)



Fonte: Autora utilizando *Maple*.

Na figura acima representamos graficamente o modelo Malthusiano expresso pela equação (44).

Na tabela 8 apresentamos as taxas de crescimento obtidas utilizando a equação (43).

Tabela 8. Estudo de taxas de crescimento relativas

| Tempo (t) | Pop. | $k_i^*$ | Tempo (t) | Pop.  | $k_i^*$ |
|-----------|------|---------|-----------|-------|---------|
| 0         | 9,9  |         | 98        | 94,5  | 3,0171% |
| 18        | 14,3 | 2,0639% | 108       | 121,1 | 2,5112% |
| 28        | 17,4 | 1,9815% | 119       | 146,9 | 1,7713% |
| 48        | 30,6 | 2,8629% | 124       | 157,1 | 1,3478% |
| 68        | 41,2 | 1,4983% | 128       | 169,5 | 1,9223% |
| 78        | 51,9 | 2,3357% | 135       | 184,0 | 1,1779% |
| 88        | 70,2 | 3,0664% | 138       | 190,7 | 1,2030% |

Fonte: Autora utilizando *Excel*.

#### 4.2.2 Modelo Logístico

Em pesquisa se observou que o modelo logístico é utilizado em casos onde há uma tendência de estabilidade (comportamento assintótico horizontal), onde

também a variável dependente é crescente e há uma mudança de concavidade na curva ajustada.

O modelo logístico é um modelo que pressupõe o modelo de Malthus apresentado no subcapítulo anterior. Verhulst (1838) de forma mais realista contou que influências de fora (externas) poderiam alterar a população. Nele consideramos que a taxa de crescimento populacional varia de forma linear com a população.

De acordo com o modelo de Verhurst a população tende a atingir um limite máximo sustentável, ou seja, ela tende a se estabilizar.

Bassanezi em seu livro demonstra como Verhurst chegou à equação logística. Para evitar conflito de nomenclatura na citação abaixo substituiremos o “r” por “k” já que estamos utilizando o “r” para tratar o coeficiente de correlação.

“[...], considerando a taxa de crescimento como sendo proporcional à população em cada instante. Assim,

$$\frac{dP}{dt} = \beta(P)P \quad (6.11)$$

com  $\beta(P)P = k \left( \frac{P_\infty - P}{P_\infty} \right)$ ,  $k > 0$  e  $P_\infty$  sendo o valor limite da população.

Desta forma  $\beta(P)$  tende a zero quando  $P \rightarrow P_\infty$ .

Explicitando  $\beta(P)$  na equação (6.11), e supondo que  $P(0) = P_0$  seja dado, temos o modelo clássico de Verhurst ou modelo logístico:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP \left( 1 - \frac{P}{P_\infty} \right) \\ P(0) = P_0, k > 0 \end{cases} \quad (6.12)$$

Observamos que  $P(t) \equiv 0$  e  $P(t) \equiv P_\infty$  são soluções da equação diferencial dada em (6.12). A solução analítica de (6.12) é obtida por integração após a separação das variáveis, isto é,

$$\int \frac{dP}{P(1 - P/P_\infty)} = \int k dt \quad (6.13)$$

Usando a técnica das frações parciais para resolver a integral do 1º membro, obtemos

$$\int \frac{dP}{P(1-P/P_\infty)} = \int \left( \frac{1}{P} + \frac{1/P_\infty}{(1-P/P_\infty)} \right) dp = \ln|P| - \ln \left| 1 - \frac{P}{P_\infty} \right|$$

Logo

$$\ln \left| \frac{P(t)}{1 - P(t)/P_\infty} \right| = kt + c$$

Usando a condição inicial  $P(0) = P_0$ , podemos determinar o valor da constante de integração  $c$ :

$$c = \ln \left| \frac{P(t)}{1 - P(t)/P_\infty} \right| = \ln \left| \frac{P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0} \right|$$

Portanto,

$$\ln \left( \left| \frac{P(t)P_\infty}{P_\infty - P(t)} \right| \right) = kt + \ln \left| \frac{P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0} \right|,$$

ou seja,

$$\ln \left( \left| \frac{P(P_\infty - P_0)}{P_0(P_\infty - P)} \right| \right) = kt \Rightarrow \frac{P}{P_\infty - P} = \frac{P_0}{P_\infty - P_0} e^{kt}$$

Explicitando  $P(t)$ , temos

$$P(t) = \frac{P_\infty}{\left( \frac{P_\infty - P_0}{P_0} \right) e^{-kt} + 1} = \frac{P_\infty P_0}{(P_\infty - P_0) e^{-kt} + P_0} ."$$

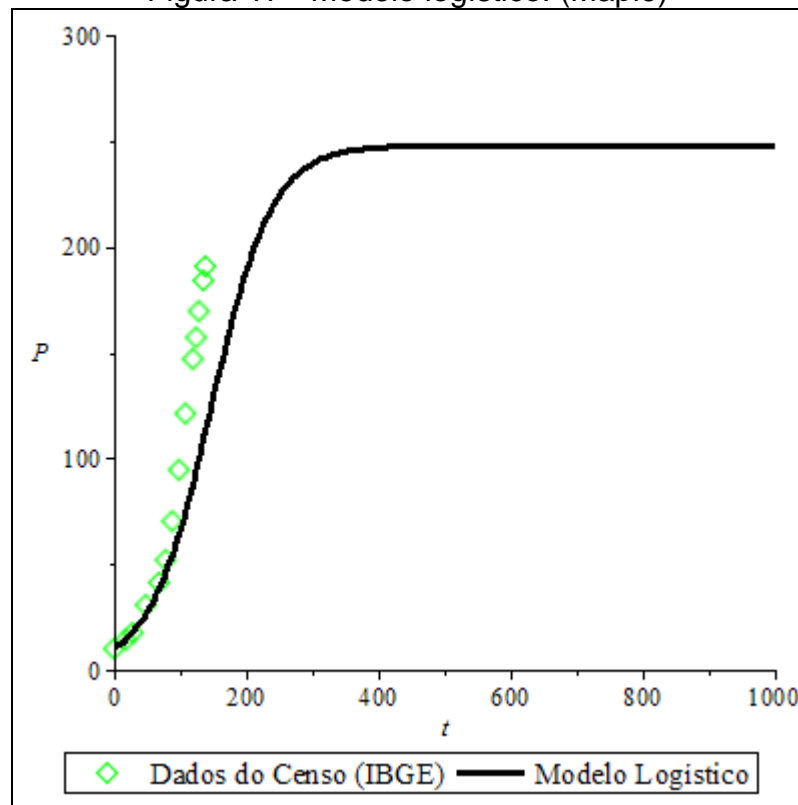
Para chegar a expressão abaixo utilizamos  $P_\infty = 248.656$  conforme o Bassanezi utilizou em sua demonstração,  $P_0 = 9,9$  e  $k = 0,021645904$ . Dessa forma chegamos a:

$$P(t) = \frac{248,656 \times 9,9}{(248,656 - 9,9)e^{-0,021645904t} + 9,9}$$

$$P(t) = \frac{2.461,6944}{(238,756)e^{-0,021645904t} + 9,9} \quad (45)$$

Com isso foi possível representar graficamente o nosso último modelo de estudo neste trabalho. Abaixo segue figura.

Figura 17 - Modelo logístico. (Maple)



Fonte: Autora utilizando *Maple*.

Na figura acima podemos visualizar que a curva não se ajusta bem aos dados se comparado ao modelo polinomial. No entanto, reproduz a tendência da estabilidade (comportamento assintótico).

### 4.3 Validação dos dados

Depois da determinação dos parâmetros de cada modelo apresentado é hora de verificar sua validade e constatar se algum deles pode servir para estimar populações futuras que é o principal objetivo deste trabalho. Para isso voltaremos a abordar o coeficiente de correlação de Pearson como critério de validação dos nossos modelos. Abaixo um resumo dos modelos.

|                            |                    |  |
|----------------------------|--------------------|--|
| Fundamentação<br>Numérica  | Modelo Linear      | $p = 1,3944t - 24,9447$  |
|                            | Modelo Exponencial | $p = 9,7814e^{0,0223t}$  |
|                            | Modelo Polinomial  | $p = 8,43831868826247 + 0,878110134401968t - 0,029804099083666t^2 + 0,000462146247447t^3 - 0,000001614482654t^4$ |
| Fundamentação<br>Analítica | Modelo Malthusiano | $p = 9,9e^{0,021645904t}$  |
|                            | Modelo Logístico   | $p = 2.461,6944 / ((238,756)e^{-0,021645904t} + 9,9)$  |

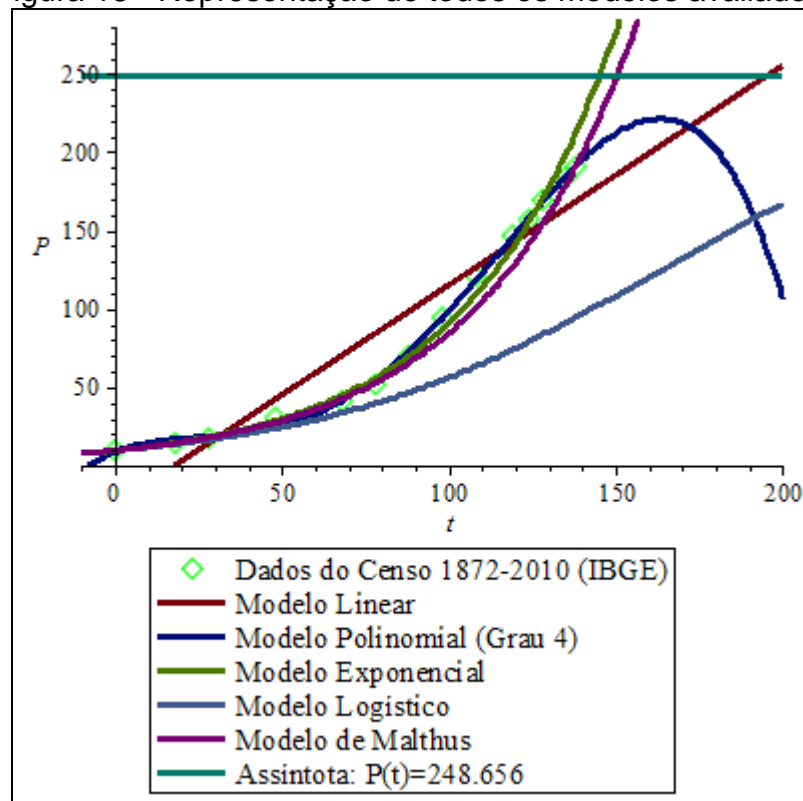
Os modelos considerados neste trabalho e suas expressões foram programados no Excel para efetuar os cálculos algébricos de maneira automática o que facilitou a conclusão da análise dos modelos.

**Tabela 9. Validação dos modelos**

| Ano  | t (tempo) | Dados IBGE | População estimada pelo modelo: |               |               |               |               |
|--|-----------|------------|---------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
|  |           |            | Linear                          | Exponencial   | Polinomial    | Malthusiano   | Logístico     |
| 1872   | 0         | 9,9        | -24,9                           | 9,8           | 8,4           | 9,9           | 9,9           |
| 1890   | 18        | 14,3       | 0,2                             | 14,6          | 17,1          | 14,6          | 14,3          |
| 1900   | 28        | 17,4       | 14,2                            | 18,3          | 18,8          | 18,1          | 17,6          |
| 1920   | 48        | 30,6       | 42,2                            | 28,5          | 24,5          | 28,0          | 26,1          |
| 1940   | 68        | 41,2       | 70,2                            | 44,6          | 41,1          | 43,1          | 38,1          |
| 1950   | 78        | 51,9       | 84,2                            | 55,7          | 55,2          | 53,6          | 45,6          |
| 1960   | 88        | 70,2       | 98,2                            | 69,6          | 73,0          | 66,5          | 54,2          |
| 1970   | 98        | 94,5       | 112,2                           | 87,0          | 94,3          | 82,6          | 63,9          |
| 1980   | 108       | 121,1      | 126,2                           | 108,7         | 118,2         | 102,5         | 74,7          |
| 1991   | 119       | 146,9      | 141,6                           | 139,0         | 145,9         | 130,1         | 87,7          |
| 1996   | 124       | 157,1      | 148,6                           | 155,4         | 158,5         | 145,0         | 93,9          |
| 2000   | 128       | 169,5      | 154,2                           | 169,8         | 168,3         | 158,1         | 99,1          |
| 2007   | 135       | 184,0      | 164,0                           | 198,5         | 184,6         | 184,0         | 108,2         |
| 2010   | 138       | 190,7      | 168,2                           | 212,3         | 191,1         | 196,3         | 112,2         |
| <b>Coefficiente de correlação (<math>r^2</math>)</b> |           |            | <b>0,9496</b>                   | <b>0,9931</b> | <b>0,9993</b> | <b>0,9938</b> | <b>0,9944</b> |

Fonte: Autora utilizando *Excel*.

Figura 18 - Representação de todos os modelos avaliados.



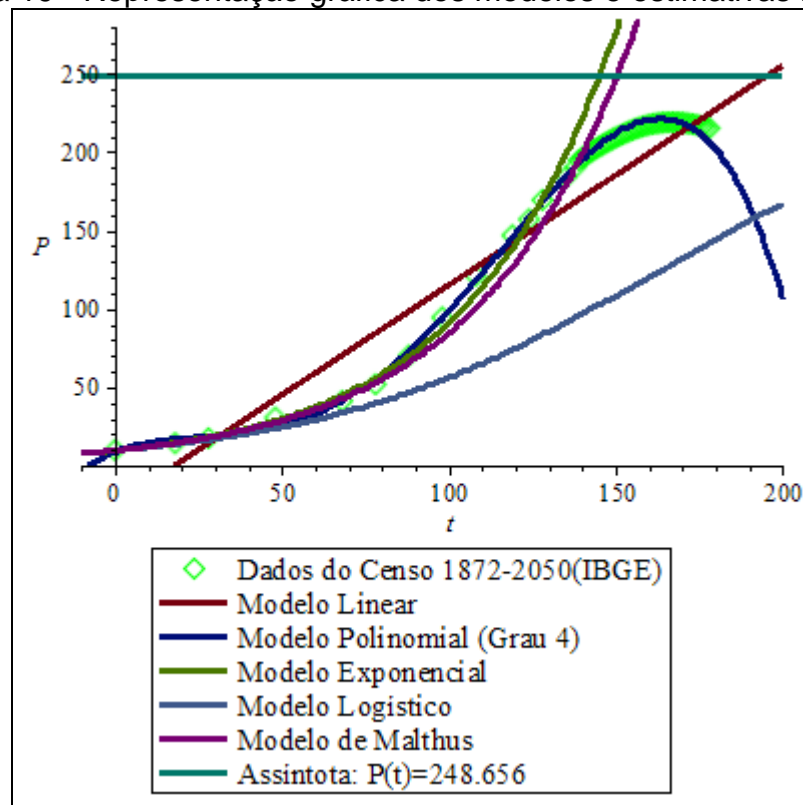
Fonte: Autora utilizando *Maple*.



Para a população já mensurada através do recenseamento verifica-se que o coeficiente de correlação do modelo polinomial tem melhor resultado, sobressaindo-se sobre o modelo malthusiano e sobre o modelo logístico.

Na figura 19 representamos graficamente todos os modelos e junto os pontos (dados de tempo x população). É possível verificar visualmente que o modelo polinomial, em azul, é o que melhor se ajusta ao dados, pontos em verde. Diferente da figura 18 onde temos somente os dados dos Censos de 1872 até 2010 (pontos em verde).

Figura 19 - Representação gráfica dos modelos e estimativas futuras.



Fonte: Autora utilizando *Excel*.

Além disso, a seguir repetimos a análise para projeções futuras, até o ano de 2050, tendo por base de dados à população estimada e divulgada pelo IBGE em nota de novembro de 2008<sup>8</sup>.

<sup>8</sup> Ver tabela 6 da publicação:

<http://saladeimprensa.ibge.gov.br/noticias?view=noticia&id=1&busca=1&idnoticia=1272>

**Tabela 10. Estimativa dos modelos comparados a estimativa do IBGE (2008)**

| Ano  | t<br>(tempo) | População<br>Estimada | População estimada pelo modelo: |               |               |               |               |
|--|--------------|-----------------------|---------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
|  |              |                       | Linear                          | Exponencial   | Polinomial    | Malthusiano   | Logístico     |
| 2011   | 139          | 194,9                 | 169,6                           | 217,1         | 193,1         | 200,6         | 113,5         |
| 2012   | 140          | 196,5                 | 171,0                           | 222,0         | 195,1         | 205,0         | 114,9         |
| 2013   | 141          | 198,0                 | 172,4                           | 227,0         | 197,1         | 209,5         | 116,2         |
| 2014   | 142          | 199,5                 | 173,8                           | 232,1         | 199,0         | 214,1         | 117,5         |
| 2015   | 143          | 200,9                 | 175,2                           | 237,3         | 200,8         | 218,7         | 118,9         |
| 2016   | 144          | 202,2                 | 176,6                           | 242,7         | 202,6         | 223,5         | 120,2         |
| 2017   | 145          | 203,5                 | 178,0                           | 248,1         | 204,4         | 228,4         | 121,6         |
| 2018   | 146          | 204,7                 | 179,4                           | 253,7         | 206,0         | 233,4         | 122,9         |
| 2019   | 147          | 206,0                 | 180,8                           | 259,5         | 207,6         | 238,5         | 124,3         |
| 2020   | 148          | 207,1                 | 182,2                           | 265,3         | 209,1         | 243,7         | 125,6         |
| 2021   | 149          | 208,3                 | 183,6                           | 271,3         | 210,6         | 249,1         | 127,0         |
| 2022   | 150          | 209,4                 | 185,0                           | 277,4         | 212,0         | 254,5         | 128,3         |
| 2023   | 151          | 210,4                 | 186,4                           | 283,7         | 213,3         | 260,1         | 129,6         |
| 2024   | 152          | 211,4                 | 187,8                           | 290,1         | 214,5         | 265,8         | 131,0         |
| 2025   | 153          | 212,4                 | 189,2                           | 296,6         | 215,6         | 271,6         | 132,3         |
| 2026   | 154          | 213,3                 | 190,6                           | 303,3         | 216,6         | 277,6         | 133,7         |
| 2027   | 155          | 214,2                 | 192,0                           | 310,1         | 217,6         | 283,6         | 135,0         |
| 2028   | 156          | 215,0                 | 193,4                           | 317,1         | 218,4         | 289,8         | 136,3         |
| 2029   | 157          | 215,7                 | 194,8                           | 324,3         | 219,2         | 296,2         | 137,7         |
| 2030   | 158          | 216,4                 | 196,2                           | 331,6         | 219,9         | 302,7         | 139,0         |
| 2031   | 159          | 217,0                 | 197,6                           | 339,1         | 220,4         | 309,3         | 140,3         |
| 2032   | 160          | 217,5                 | 199,0                           | 346,7         | 220,8         | 316,0         | 141,6         |
| 2033   | 161          | 218,0                 | 200,4                           | 354,5         | 221,2         | 323,0         | 143,0         |
| 2034   | 162          | 218,3                 | 201,8                           | 362,5         | 221,4         | 330,0         | 144,3         |
| 2035   | 163          | 218,6                 | 203,2                           | 370,7         | 221,5         | 337,2         | 145,6         |
| 2036   | 164          | 218,9                 | 204,6                           | 379,1         | 221,4         | 344,6         | 146,9         |
| 2037   | 165          | 219,0                 | 206,0                           | 387,6         | 221,3         | 352,2         | 148,2         |
| 2038   | 166          | 219,1                 | 207,4                           | 396,3         | 221,0         | 359,9         | 149,5         |
| 2039   | 167          | 219,1                 | 208,8                           | 405,3         | 220,6         | 367,7         | 150,8         |
| 2040   | 168          | 219,1                 | 210,2                           | 414,4         | 220,0         | 375,8         | 152,1         |
| 2041   | 169          | 219,0                 | 211,6                           | 423,8         | 219,3         | 384,0         | 153,3         |
| 2042   | 170          | 218,8                 | 213,0                           | 433,3         | 218,5         | 392,4         | 154,6         |
| 2043   | 171          | 218,5                 | 214,4                           | 443,1         | 217,5         | 401,0         | 155,9         |
| 2044   | 172          | 218,2                 | 215,8                           | 453,1         | 216,3         | 409,8         | 157,1         |
| 2045   | 173          | 217,9                 | 217,2                           | 463,3         | 215,0         | 418,8         | 158,4         |
| 2046   | 174          | 217,5                 | 218,6                           | 473,8         | 213,6         | 427,9         | 159,6         |
| 2047   | 175          | 217,0                 | 220,0                           | 484,4         | 212,0         | 437,3         | 160,8         |
| 2048   | 176          | 216,5                 | 221,3                           | 495,4         | 210,2         | 446,8         | 162,1         |
| 2049   | 177          | 215,9                 | 222,7                           | 506,5         | 208,2         | 456,6         | 163,3         |
| 2050   | 178          | 215,3                 | 224,1                           | 518,0         | 206,1         | 466,6         | 164,5         |
| <b>Coeficiente de Correlação (r<sup>2</sup>)</b> |              |                       | <b>0,8669</b>                   | <b>0,8031</b> | <b>0,9302</b> | <b>0,8051</b> | <b>0,8734</b> |

Fonte: Autora utilizando Excel.

Nos anos em que o Censo já foi feito podemos ver que com exceção do modelo linear, todos os modelos apresentaram coeficiente de correlação maior que 0,99 já para as estimativas futuras o único modelo que apresentou o coeficiente de correlação maior que 0,9 foi o polinomial.

Na Tabela 10 vemos que pelo mesmo critério anterior (tabela 9) que o modelo polinomial de grau quatro tem o melhor ajuste, no entanto, sabemos que este modelo tende a decrescer de forma brusca a partir do ponto<sup>9</sup>  $t=163,2492$  que corresponde ao ano de 2035 a população máxima será de 211,5 milhões. A raiz real positiva do polinômio de grau quatro é 211,75 isso significa que a partir do ano de 2084 a população já será negativa. Partindo dessa premissa poderíamos descartar esse modelo para estimativas futuras, no entanto, como podemos notar novamente na representação gráfica o modelo se ajusta bem as estimativas projetadas pelo IBGE. O ponto de crescimento zero para o IBGE está no  $t=167$  ano de 2039, valor bem próximo do que foi calculado acima. A não ser que a população seja acometida por desastres naturais, guerras, epidemias o que resultaria numa taxa de mortalidade muito alta e então a população teria forte queda em seu número. O segundo melhor modelo de acordo com a tabela é o modelo logístico, ao iniciarmos este estudo acreditávamos que este seria o modelo eleito para tal questão já que tem por característica a tendência de estabilidade como toda população.

Sabemos que a estimativa para populações futuras vai muito além da análise somente do crescimento populacional, leva em consideração também fatores como nascimentos e óbitos ocorridos, assim como o número de imigrantes e emigrantes. No entanto, analisando de uma forma abrangente verificamos que dentre os modelos estudados neste curto espaço de tempo, podemos concluir e validar o mesmo modelo para ambas situações-problema, para população já mensurada o modelo polinomial teve seu resultado adequado assim como se tratando de estimativas futuras. É óbvio que uma população não pode crescer de forma exponencial para sempre e com isso os modelos lineares e exponencial são inaplicáveis para estas estimativas, pois o próprio ambiente se encarrega de inibir o crescimento.

---

<sup>9</sup> Ponto máximo da equação (35) calculado através da primeira derivada do polinômio de grau 4, o que resulta num polinômio de grau três, e este igualado a zero foi possível calcular seus pontos utilizando o método *so/ve* do Maple.

Há outros modelos propostos de estimar a população futura como por exemplo: modelos geométrico, hiperbólico, mesoscópicos, modelo de Leslie, de Montroll (1971), de Gompertz (1825), de Smith (1963), de Ayala, Ehrenfeld, Gilpin (1973), que em outra oportunidade serão analisados junto da análise populacional do estado do Rio Grande do Sul.

Tratar da temática do crescimento populacional é importante visto que afeta diferentes áreas como o meio ambiente devido à capacidade de suporte, e outros fatores como podemos citar a economia.

É perceptível que na população humana alguns fatores são muito mais complexos que só as taxas de natalidade e mortalidade. Essa complexidade se dá também ao fato cultural de controle de natalidade, dependem também de epidemias, guerra, fome, etc..

Com este estudo foi possível verificar a importância do caráter investigativo, aprendendo a interpretar, desenvolver o raciocínio, a resolver os problemas propostos, além de articular os saberes aprendidos durante a graduação.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi realizar um estudo abrangente sobre como modelar o crescimento populacional brasileiro.

O primeiro passo deste trabalho foi identificar, através de estudos sobre os dados censitários, os quais foram coletados diretamente do IBGE considerados então relevantes na construção desta pesquisa. Um conjunto de quatorze dados (população x tempo) foi estudada em conjunto. O trabalho buscou também identificar o melhor resultado para duas situações - problema similares (população já estimada e população a estimar).

Paralelamente foram investigados alguns estudos já realizados que forneceram suporte para a construção da fundamentação matemática. Dentre as opções existentes foram escolhidos cinco modelos, sobre os quais os estudos foram aprofundados. Os cinco modelos são: linear, exponencial, polinomial, malthusiano e logístico. São significativos uma vez que possuem diferença na forma como foram desenvolvidos, e mais ainda, no resultado que apresentaram. Existem outros modelos que possuem algum tipo de similaridade com alguns dos modelos já citados. Devido ao curto espaço de tempo para desenvolver este trabalho não foi possível realizar mais análises.

A conclusão que chegamos é que para a população já mensurada pelo Censo o modelo exponencial se adapta também para o estudo de estimativas apesar de num primeiro momento crer que o modelo logístico seria o mais indicado.

A última parte do trabalho foi fazer a análise dos modelos através do coeficiente de correlação de Pearson, tirando proveito dos estudos feitos individualmente nas fases anteriores do trabalho. O objetivo foi realizar uma modelagem que pudessemos utilizar para estimativas futuras da população. Para que essas estimativas pudessem ser de alguma forma calculadas era necessário utilizar como base de dados os que já haviam sido computado até o momento (Censo 1872-2010).

Atualmente o IBGE utiliza o modelo exponencial para fazer estimativas. A escolha de utilizar outros modelos ocorreu devido a facilidade para construí-los através de softwares como o Excel, Maple, BlueBit, Wolphram Alpha e Curve Expert,

que geram alta produtividade, já que evitam que grande parte do tempo seja despendido para cálculos manuais. Tratando-se da validação da possibilidade de programação dos dados (Excel) para manipulação auxiliou-nos de maneira honrosa a chegarmos as conclusões deste trabalho. Esses mecanismos aceleraram o desenvolvimento visto que se fez desnecessário refazer cada modelo partindo do início. Já o domínio da matemática se mostrou fundamental em boa parte das aplicações onde o desempenho era indispensável. Talvez, dispondo de tempo às análises tivessem sido mais completas e bem definidas.

Este estudo precisa ainda de uma experimentação maior para assim atingir o grau de maturidade requerido, análise não somente do crescimento, mas também de outros fatores que influenciam para que a estimativa se aproxime do real, e com isso atingir o seu objetivo.

A conclusão final é que através do estudo foi possível investigar modelos ainda não vistos no período do curso, relevantes para aplicações orientadas a modelagem matemática. Apesar do surgimento de alguns resultados não esperados, o desenvolvimento do trabalho continua sendo um desafio. A questão envolvida, como estimar a população futura, ainda não foi totalmente resolvida, visto que não foi possível calcular a capacidade de suporte do sistema para uma melhor apuração do modelo logístico. Porém, com certeza o estudo já feito irá facilitar as tarefas que estarão por vir e foi muito proveitoso. Mais do que isso, se basear neste estudo é importante, visto que uma superpopulação em médio prazo trará riscos, em razão da escassez dos recursos para sobrevivência.

A seção a seguir apresenta sugestões de estudos futuros com o objetivo de encorajar a continuidade do trabalho desenvolvido.

### **5.1 Trabalhos futuros**

Este trabalho fornece algumas opções que diz respeito a continuidade do desenvolvimento do modelo logístico. Segue abaixo:

- ✓ Cálculo da capacidade de suporte do sistema ( $P_{\infty}$ )

Fazer uma análise detalhada com o objetivo de descobrir como determinar a capacidade máxima de suporte que por fim trará melhores resultados para as estimativas futuras.

✓ Estudo de dígitos decimais.

Assim como vimos no modelo polinomial de grau três e quatro que o número de dígitos decimais influenciaram no resultado a intenção é ampliar este estudo para os demais modelos e verificar novamente suas validades através do cálculo do coeficiente de correlação ( $r^2$ ).

✓ Novas projeções

Após a conclusão deste trabalho verificou-se que novas projeções estimando população futura já foram feitas (até 2031), com isso a intenção é de utilizar esse novo banco de dados para tentar encontrar o modelo que estime populações futuras.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. **Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise**. Zetetiké, Campinas, v.18, Número Temático 2010, p.387-414, 2010.

BALSA, C.; SANTOS, A. **Capítulo 3: Aproximação de funções pelo método dos Mínimos Quadrados**. Disponível em: <<http://www.ipb.pt/~balsa/teaching/MN08/Cap3.pdf>> Acesso em: 05 maio 2013.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2010.

BENDER, Edward A., **An Introduction to Mathematical Modeling**, , New York, Dover Publications, 2000.

BIEMBENGUT, Maria Salett. São Paulo. **Modelagem matemática no ensino**. 2011.

BLUEBIT, Software. Disponível em: < <http://www.bluebit.gr/>>

BURDEN, Richard L., FAIRES, J. Douglas. **Análise numérica**. São Paulo : Thomson, 2003.

CHAPRA, Steven C., CANALE, Raymond P. **Numerical methods for engineers with programming and software applications**. 4.ed. Boston : McGraw-Hill, 2002.

**CRESCIMENTO POPUCIONAL E A CAPACIDADE DE SUPORTE. População humana em comunidades ecológicas**. Disponível em: <[http://philip.inpa.gov.br/publ\\_livres/mss%20and%20in%20press/K%20livro%20port/Capit%203%20com%20figuras.pdf](http://philip.inpa.gov.br/publ_livres/mss%20and%20in%20press/K%20livro%20port/Capit%203%20com%20figuras.pdf)>. Acesso em: 03 maio 2013.

CURVE EXPERT. Versão 1.4, 2009. Daniel Hyams.

EXCEL, Microsoft Office. 2007.

IBGE. **O que é o Censo?**. Disponível em: < <http://7a12.ibge.gov.br/sobre-o-ibge/o-que-e-censo> >. Acesso em: 15 março 2013.



IBGE: **Projeção da População do Brasil por Sexo e por Idade - 1950-2050 Revisão 2008.** Disponível em: <[http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/projecao\\_da\\_populacao/2008/projecao.pdf](http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/projecao_da_populacao/2008/projecao.pdf)>. Acesso em: 10 de junho 2013.

MALTSHUS, THOMAS ROBERT. **Ensaio sobre o princípio da população.** Lisboa: Europa-América, 1980.

MAPLE, Waterloo. Versão 16. 2012.

NETO, JOSÉ FERNANDES BEZERRA. **Ecologia de Populações.** Disponível em: <<http://ecologia.icb.ufmg.br/~joseneto/jose/Modelos%20de%20crescimento%20populacional%20-%20exemplos.pdf>> Acesso em: 18 abril 2013.

OLIVEIRA, Luiz Antonio Pinto de. **O Brasil através do Censo.** Disponível em: <http://www.cartacapital.com.br/educacao/o-brasil-atraves-do-censo>. Acesso em: 25 de maio de 2013.

OLIVEIRA, Camila Fogaça. Apucarana – PR. **Aspectos epistemológicos da previsão de fenômenos: um estudo usando modelagem matemática**, 2011. 3 p.

PAQUES, OTILIA TEREZINHA W. **Guia do Professor Vídeo: O sonho.** Disponível em: <<http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/20051/osonho.pdf?sequence=2>>. Acesso em: 09 maio 2013.

SÉRGIO, PAULO. **A equação logística e a gripe A.** Julho, 2009. Disponível em: <<http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2009/07/equacao-logistica-e-gripe.html>> Acesso em: 10 maio 2013.

SOUZA, MARCONE JAMILSON FREITAS. **Notas de aula de Métodos Numéricos.** Disponível em: <<http://www.decom.ufop.br/prof/marcone/Disciplinas/MetodosNumericoseEstatisticos/QuadradosMinimos.pdf>>. Acesso em: 20 abril 2013.

STEFFENS, CÉSAR AUGUSTO; VEIT, ELIANE ANGELA; SILVEIRA, FERNANDO LANG DA. **Textos de apoio ao professor de física: Uma introdução ao processo da medição no ensino médio.** Porto Alegre, 2008. Disponível em: <[http://www.if.ufrgs.br/public/tapf/v19n2\\_Steffens\\_Veit\\_Silveira.pdf](http://www.if.ufrgs.br/public/tapf/v19n2_Steffens_Veit_Silveira.pdf)>. Acesso em: 26 abril 2013.

VIANA, RICARDO L. **Introdução à Dinâmica Não-Linear e Caos em Economia.** Curitiba, 2012. Disponível em: <<http://fisica.ufpr.br/viana/caos/livro.pdf>>. Acesso em: 26 abril 2013.

WOLFRAMALPHA, Disponível em: < <http://www.wolframalpha.com/>>.