INDIVIDUALIDADE E CARDINALIDADE

INDIVIDUALITY AND CARDINALITY

Jonas Rafael Becker Arenhart*

RESUMO: Neste trabalho, apresentamos uma definição de contagem alternativa à usual. Conforme definida geralmente, contar os elementos de uma coleção de objetos significa estabelecer uma bijeção entre esta coleção e a coleção de predecessores de um numeral n, sendo este n por definição o cardinal da coleção. Em geral, considera-se que um indivíduo deve poder pertencer a coleções que possam ser contadas, e do mesmo modo, se algo pode pertencer a uma coleção que pode ter seus elementos contados, então deve ser um indivíduo. Nossa definição é formulada em uma teoria de quase-conjuntos, que permite que os objetos da coleção sendo contados segundo nosso método não representem indivíduos, rompendo assim o vínculo que se costuma estabelecer entre estas duas noções, e permitindo que falemos com sentido do cardinal de coleções de objetos que não são indivíduos.

PALAVRAS-CHAVE: Contagem. Não-indivíduos. Quase-conjuntos.

ABSTRACT: In this paper we present a definition of counting alternative to the usual one. As it is usually defined, to count the members of a collection means to determine a one-to-one function between this collection and the collection of predecessors of a numeral n, which is by definition the cardinal of the collection. Generally, it is considered that individuals must be able to belong to collections that can be counted, and also, if something can be the element of a collection that can be counted, than it must be an individual. Our definition is formulated in a quasi-set theory, which allows that the objects of the collection being counted according to our method represent non-individuals, breaking thus the link which is usually drawn between these notions, and allowing us to make sense of statements involving cardinality of objects that are not individuals.

KEY WORDS: Counting. Non-individuals. Quasi-sets.

Em discussões metafísicas sobre o princípio de individualização, um dos aspectos que em geral é levado em consideração é o de que objetos que possam ser chamados apropriadamente de indivíduos devam poder ser, pelo menos em princípio, membros de coleções que podem ser contadas. Através desta contagem, somos capazes de atribuir a estas coleções um número cardinal, que representa a quantidade de elementos da coleção. De modo geral, o fato de se tratar estas duas noções como intimamente relacionadas, a de contagem e a

* Doutorando em Filosofia-UFSC. Contato: jonas.becker2@gmail.com

de cardinal de uma coleção, acaba fazendo com que pareça natural derivarmos algumas conclusões metafísicas que são baseadas nestas pressuposições.

Para tornar mais rigorosa nossa exposição do problema, devemos primeiramente tornar claro o que se costuma tomar como o significado da expressão "contagem dos elementos de uma coleção". Na acepção mais conhecida do termo "contar", que é utilizada geralmente nestas discussões, a contagem do número de elementos de uma coleção é feita através de uma correspondência um a um entre os elementos da coleção e uma coleção de numerais. Mais precisamente, a contagem envolve um processo no qual é atribuído um numeral de modo único e em ordem crescente a cada elemento da coleção, e o numeral atribuído ao último dos objetos enumerados determina também o número de elementos na coleção, ou seja, seu cardinal.

Neste trabalho, discutiremos alguns dos pressupostos ontológicos deste particular modo de se atribuir um cardinal a determinada coleção, e indicaremos uma alternativa a ele, que não pressupõe que tenhamos que contar os elementos da coleção através de um processo de aplicação de rótulos para que possamos atribuir a ela um cardinal. Como dissemos, a contagem, segundo esta definição, pressupõe que possamos atribuir um numeral a cada elemento da coleção sendo contada, ou seja, eles devem poder ser rotulados de modo inequívoco com um numeral, e assim, devem ser de tal modo que sempre possamos identificá-los e diferenciá-los uns dos outros, tanto para atribuir os rótulos quanto após esta atribuição.

A alternativa que vamos propor é relevante filosoficamente, pois, segundo argumentam alguns filósofos, faz sentido falarmos da cardinalidade de coleções de objetos que não podem ser contados seguindo-se a definição apresentada acima. Em particular, este seria o caso para coleções de objetos de uma das mais importantes teorias físicas atuais, a mecânica quântica não-relativista, que, segundo estes autores, não podem ser identificados e rotulados como é necessário que seja feito para que a definição acima funcione, mas que ainda assim podem ser agregados em coleções com um cardinal bem determinado[1]. Assim, para sustentar sua posição, estes filósofos devem, de algum modo, dar sentido para afirmações sobre cardinalidade de coleções contendo estes objetos.

[1] Conforme a discussão em FRENCH, S., KRAUSE, D. *Identity in Physics: A historical, philosophical and formal analysis.* Oxford: Oxford University Press, 2006.

O primeiro ponto a ser notado ao avaliarmos criticamente a definição de contagem apresentada é que, para que possamos dar sentido a alguns dos termos que fazem parte do seu enunciado, como “correspondência um a um” e “coleções”, estamos trabalhando em alguma teoria de conjuntos, mesmo que mantida ao nível intuitivo, e que é esta teoria de conjuntos que permite que formemos coleções de objetos e na qual definimos as noções de contagem e de número cardinal. Teorias de conjuntos, em geral, não são absolutamente ingênuas de um ponto de vista ontológico, seus axiomas nos indicam que tipo de coleções podem ser consideradas como existindo legitimamente, e em particular, que tipo de coleções de objetos podem receber um número cardinal.

Assim, por mais elementar que possa parecer a contagem do número de elementos de uma coleção de objetos, ela envolve, quando examinada rigorosamente, uma aplicação da matemática[2]. A matemática utilizada neste caso é uma teoria de conjuntos. No entanto, do fato de que atualmente existem várias teorias de conjuntos não equivalentes entre si, temos que neste tipo de discussão é da maior importância tornar explícita qual a teoria que estamos utilizando, dado que a teoria utilizada vai determinar precisamente os conceitos envolvidos na noção de contagem, e vai até mesmo determinar se esta definição pode ser aplicada com sentido.

Nosso próximo passo, então, deve ser determinar que tipo de objetos nossos conjuntos podem conter como elementos para que a definição acima possa fazer sentido, ou seja, determinar qual teoria de conjuntos estamos utilizando nestes casos. Isto deve ser feito para que possamos especificar quais são as coleções que podem figurar legitimamente como coleções em nossa teoria de conjuntos para que a definição usual se aplique com sentido. Como observamos anteriormente, uma das principais condições impostas aos objetos sendo contados, entre outras condições, é a de que os elementos da coleção a ser contada possam ser identificados de modo único. Isso é relevante, pois, no momento em que se estabelece a correspondência um a um entre a coleção de objetos e o conjunto de numerais, devemos poder atribuir de modo único um numeral a cada elemento da coleção, devemos poder rotular univocamente cada elemento da coleção com um numeral. Conforme mencionamos acima, os objetos sendo contados devem poder ser diferenciados uns dos outros para que possamos fazer a atribuição unívoca dos numerais.

Que tipo de objetos podem ser contados deste modo? Nas discussões sobre o tema, objetos que podem ser assim identificados e distinguidos uns dos outros através de rótulos, que em particular podem servir como nomes próprios, são ditos objetos que, de certo modo, podem ser considerados como sendo indivíduos[3], ou seja, uma teoria satisfatória sobre a individualidade deve englobá-los como indivíduos. As teorias de conjuntos usuais, como Zermelo-Fraenkel (ZF) e von Neumann-Bernays-Gödel (NBG), satisfazem este requisito. Nestas teorias, todos os itens com os quais a teoria trata são individualizáveis, cada um deles pode ser distinguido dos demais, e assim, podemos considerar que estas teorias tratam apenas de coleções de indivíduos[4]. Note ainda que isto por princípio parece excluir da alçada destas teorias coleções que, por exemplo, tenham como elementos objetos que possam ser absolutamente indistinguíveis mas numericamente distintos.

No entanto, existem fortes argumentos para se assumir que certos objetos não podem ser tratados como indivíduos, ou seja, que é razoável assumir que nossa ontologia deveria, pelo menos em princípio, ser consistente também com a existência de objetos que não são indivíduos, na acepção específica de que afirmações envolvendo identidade e diferença destes objetos não podem ser feitas com sentido. Um dos campos em que estes argumentos surgem com freqüência é na filosofia da mecânica quântica[5]. Segundo muitos autores, os objetos dos quais trata esta teoria não são indivíduos, não podem ser individualizados como os objetos do dia a dia, e como uma conseqüência disso, em particular, não podem figurar como elementos de coleções de teorias de conjuntos como as mencionadas acima, nas quais a identidade e diferença se aplicam a todos os objetos considerados. Além disso, outra característica muito enfatizada destes objetos é o fato de poderem ser absolutamente indistinguíveis, de possuírem todas as propriedades em comum, sendo, no entanto, numericamente distintos.

Assumindo que estes argumentos são plausíveis, a questão que surge, então, é como podemos atribuir cardinais a coleções destes objetos, já que não podemos utilizar as teorias de conjuntos usuais para tratar legitimamente de coleções destes objetos. Como vimos, a noção

---

[2] A contagem como aplicação da matemática é discutida em STEINER, M. 'Mathematics – Application and Applicability', in: SHAPIRO, S., (ed.) *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford Un. Press, 2005, p. 629.

[3] LOWE, E. J. 'The Possibility of Metaphysics: Substance, Identity and Time' Oxford: Oxford University Press, 1998, capítulos 2 e 3.

[4] Este tópico é discutido com detalhes em FRENCH, S., KRAUSE, D. Identity in Physics: A historical, philosophical and formal analysis. Oxford: Oxford University Press, 2006, capítulos 6 e 7.

[5] Além da já mencionada obra de FRENCH e KRAUSE, ver também FRENCH, S. 'Identity and Individuality in Classical and Quantum Physics' *Australasian Journal of Philosophy* **67** (4), (1989), pp. 433-446.

usual de contagem está estritamente vinculada com a identificação dos objetos contados, algo que, segundo os autores mencionados, não pode ser feito com objetos como aqueles que figuram em teorias como a mecânica quântica. Isto significa que não podemos dar sentido rigoroso a afirmações envolvendo cardinalidade de coleções destes objetos? A resposta seria afirmativa caso nos restringíssemos apenas às teorias usuais de conjuntos, que tratam apenas de coleções de indivíduos.

No entanto, para contextos em que objetos que não são indivíduos estão envolvidos, podemos considerar teorias de conjuntos alternativas. Uma destas teorias, a que consideraremos aqui, é a teoria de quase-conjuntos *Q*[6]. Nesta teoria, além das coleções usuais que podem ser formadas em teorias como ZFU (Zermelo-Fraenkel com átomos), podemos formar coleções de um tipo especial de objetos, chamados *m-átomos*, que representam na teoria *Q* objetos que não são indivíduos no sentido discutido acima, ou seja, a identidade e a diferença não se aplicam com sentido a eles, mas que podem figurar em uma relação mais fraca de indistinguibilidade. Deste modo, a teoria *Q* nos permite formar coleções de objetos que, além de não serem indivíduos, podem ser ditos indistinguíveis, no sentido de partilharem todas as suas propriedades, como se diz ser o caso para as partículas da mecânica quântica. Com isto, o primeiro problema, de não podermos formar coleções de objetos que não podem ser identificados e distinguidos está remediado, basta assumir a teoria de conjuntos certa para a ocasião.

Assim, a próxima dificuldade passa a ser como podemos determinar o cardinal de coleções de m-átomos na teoria *Q*. Vimos que, nas teorias usuais, onde a identidade sempre se aplica a todos os itens, a definição usual de contagem nos fornece a resposta para o problema, basta determinarmos uma bijeção entre a coleção e um número finito. Na teoria *Q*, onde a identidade não se aplica a todos os objetos considerados pela teoria, outros meios precisam ser empregados.

Existem pelo menos dois caminhos que podem ser seguidos: podemos postular que os cardinais para estas coleções existem e satisfazem as propriedades que esperamos que cardinais satisfaçam, ou podemos tentar apresentar uma definição diferente da usual, que não pressuponha que a identidade faça sentido para os elementos a serem contados[7]. Certamente a

[6] A referência padrão para esta teoria é FRENCH, S., KRAUSE, D. Identity in Physics: A historical, philosophical and formal analysis. Oxford: Oxford University Press, 2006, capítulo 7.
[7] Para expor como isto pode ser feito, estamos seguindo DOMENECH, G., HOLIK, F. 'A discussion on particle number and quantum indistinguishability' *Foundations of Physics*, vol. 37, no. 6, (2007), pp. 855-878.

segunda opção é a mais interessante, e é aquela que seguiremos aqui. A idéia fundamental, neste caso, consiste em utilizarmos um procedimento que nos permita 'eliminar' um a um os elementos da coleção sendo contada, e contarmos o número de vezes que repetimos este processo até que a coleção sendo contada esteja vazia. Isto é feito de modo que podemos garantir consistentemente, utilizando os recursos da teoria *Q*, que apenas um elemento é retirado em cada etapa do processo, e que podemos contar adequadamente o número de passos necessários para esvaziar a coleção. Este número, que pode ser provado ser único, será por definição o cardinal da coleção.

O que é importante neste último caso, mesmo que não especifiquemos todos os detalhes do desenvolvimento formal, é que o procedimento de 'esvaziar' uma coleção retirando um elemento por vez da coleção até que fique vazia não pressupõe que tenhamos que identificar os elementos da coleção, ou seja, o procedimento se aplica corretamente aos objetos que não são indivíduos e que figuram nas coleções de *Q*. Além disso, pode-se mostrar que, para coleções em *Q* de objetos que são indivíduos, a definição alternativa e a usual fornecem o mesmo resultado. A definição proposta por Domenech e Holik, é importante mencionar, aplica-se apenas a coleções finitas, mas em grande parte das discussões sobre os fundamentos da física são apenas estas que nos interessam, de modo que este fato não impõe limitações aos nossos interesses.

Filosoficamente, o que é relevante é que estes desenvolvimentos tornam claro que podemos considerar de modo rigoroso a noção de cardinalidade também em casos de coleções de objetos que não são indivíduos, na acepção indicada acima, e ainda, que podem ser absolutamente indistinguíveis, contrariamente ao que sugere a definição usual de contagem que é utilizada para determinar o cardinal das coleções na maioria das discussões. Com a definição apresentada, é possível dar sentido a afirmações envolvendo cardinalidade de coleções destes objetos, e remover um dos obstáculos que se costuma colocar no caminho da posição filosófica que admite que estes tipos de objetos podem figurar em nossa ontologia, pois podemos mostrar que, diferentemente do que se costuma supor, a noção de cardinalidade não necessita pressupor que os itens tratados sejam sempre identificáveis e individualizáveis. Assim, pelo menos os argumentos que buscam atacar esta posição mostrando que ela é incompatível com as noções de cardinalidade e contagem parecem perder seu efeito.

Referências

DOMENECH, G., HOLIK, F. ‘A discussion on particle number and quantum indistinguishability’ *Foundations of Physics*, vol. 37, no. 6, (2007), pp. 855-878.

FRENCH, S. ‘Identity and Individuality in Classical and Quantum Physics’ *Australasian Journal of Philosophy* **67** (4), (1989), pp. 433-446.

FRENCH, S., KRAUSE, D. *Identity in Physics:* A historical, philosophical and formal analysis. Oxford: Oxford University Press, 2006.

LOWE, E. J. *The Possibility of Metaphysics:* Substance, Identity and Time Oxford: Oxford University Press, 1998.

STEINER, M. ‘Mathematics – Application and Applicability’, in: SHAPIRO, S., (ed.) *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford Un. Press, 2005, pp. 625-650.