

# *Revista da Graduação*

---

Vol. 4

No. 2

2011

11

---

**Seção: FACULDADE DE ENGENHARIA**

Título: Análise estrutural de cascas via  
elementos finitos em concreto armado

Autor: Augusto dos Reis Silveira Alves

Este trabalho está publicado na Revista da Graduação.

ISSN 1983-1374

<http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/graduacao/article/view/10045/7083>

# ***ANÁLISE ESTRUTURAL DE CASCAS VIA ELEMENTOS FINITOS EM CONCRETO ARMADO***

**Autor: Augusto dos Reis Silveira Alves (augreis@gmail.com)  
Orientadora: Prof<sup>a</sup> Maria Regina Costa Leggerini**

**Resumo:** O objetivo principal desse trabalho é realizar uma análise estrutural linear elástica estática de cascas, evidenciando o dimensionamento estrutural das cascas em concreto armado, visando ter uma idealização do comportamento estrutural deste tipo de elemento indicando as regiões dos maiores esforços e deformações. O dimensionamento estrutural de peças correntes na engenharia já é muito estudado e bem aceito na comunidade científica. Entretanto, a análise de cascas possui esparsos referenciais analíticos. Perante a isso, os métodos numéricos se apresentam como o melhor instrumento para estimar soluções. No presente trabalho emprega-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), em que não apenas pode ser feita a análise, como o dimensionamento estrutural, ou seja, determinar a disposição das armaduras necessárias para que a estrutura responda satisfatoriamente aos carregamentos impostos. A análise será baseada em teorias consagradas de placas e cascas, pretendendo também abordar a modelagem desses elementos.

**Palavras-chaves:** *”Método dos Elementos Finitos; Cascas; Concreto Armado”*

## **1. Introdução:**

Por definição a casca é caracterizada por uma superfície média de um sólido de espessura bem menor do que as suas dimensões da superfície média. Também é referida como uma estrutura com concavidade diferente de zero. Sua aplicação na engenharia é bastante ampla devido à eficiente capacidade de carga, podendo vencer grandes vãos, utilizando-se de uma quantidade menor de materiais. Já do ponto de vista estético, possui um efeito arquitetônico de leveza e beleza. O elemento de casca em concreto armado pode ser bem empregado em estruturas destinadas a silos, estádios, auditórios, teatros, etc. Esses atributos requerem uma análise mais criteriosa e complexa do que outros modelos estruturais correntes, devido a sua geometria complexa e pela grande dificuldade de se obter soluções analíticas.

### **1.1 Justificativa do Tema:**

O conhecimento de modelos estruturais e a maneira como se comportam são fatores indispensáveis na área de projetos de estruturas. Assim, realizar um estudo de análise de um modelo complexo como o de casca implica adquirir conhecimentos em métodos numéricos

para que se possibilite estimar soluções. Nesse trabalho será abordado o Método de Elementos Finitos (MEF), além de outras formulações.

### 1.2 Objetivo:

Esse trabalho de conclusão de curso tem por objetivo fazer uma análise estrutural de um elemento de casca e, por conseguinte, a verificação das armaduras necessárias a resistir os esforços e tensões atuantes da casca em concreto armado como mostra a figura abaixo. No trabalho será explanada a teoria que envolve a análise e o dimensionamento destes elementos.

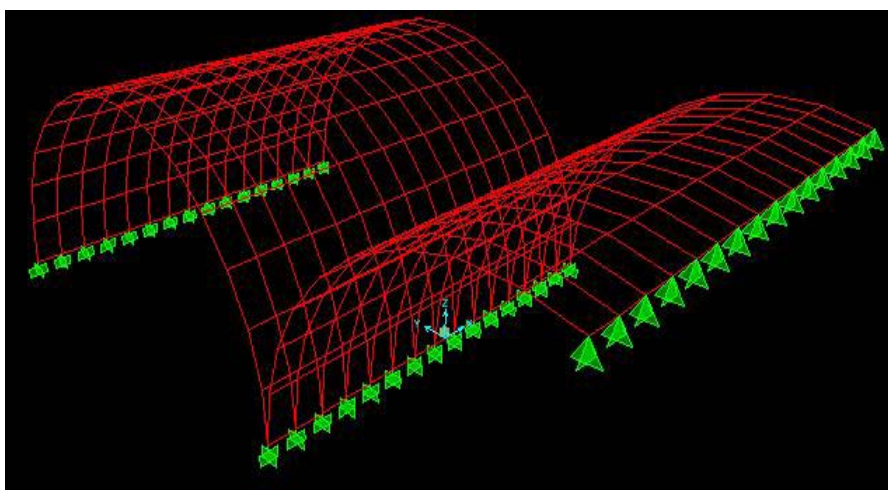


FIGURA 1 – Estrutura gerada  
O modelo possui 360 elementos e 400 nós.

### 1.3 Delimitações do Trabalho:

O trabalho não pretende explicar a teoria de Elementos Finitos, mas sim delinear conceitos teóricos e matemáticos que envolvem um elemento finito de casca. O conceito de cada termo e sua respectiva função no dimensionamento será pautado. Não será considerado o efeito de vento e as cargas consideradas serão somente o peso próprio.

## 2 Referencial Teórico:

A análise estrutural das cascas é realizada geralmente através do método dos elementos finitos, onde se procura determinar o campo de deslocamentos cinematicamente admissíveis assim como as tensões estaticamente admissíveis. A abordagem utilizada no método de elementos finitos para elementos da elasticidade tridimensional dá-se através dos trabalhos virtuais ou minimização da energia potencial total (SORIANO, 2003).

No trabalho é empregada a superposição dos elementos finitos de placa com estado plano de tensões, assim gerando um elemento de casca poliédrica (VAZ, 2011). O elemento

de placa segue da teoria de Kirchhoff-Love (SORIANO, 2003) para placas finas. Diversos autores utilizam abordagens mais sofisticadas, baseadas na teoria de Reissner-Mindlin-Ramm (1983), onde é considerada a deformação por esforços cortantes.

No trabalho de Almeida (2006), foi utilizado o elemento DKT (*Discrete Kirchhoff Triangle*) para placa, somado com o elemento CST (*Constant Stress Triangle*) para o estado plano de tensões. O objetivo era otimizar estruturas de materiais compostos.

*Theory of plates and Shells (1959)*, livro em que os autores Stephen P. Timoshenko e S.Woinowsky-Krieger fornecem um grande embasamento teórico e analítico de placas e cascas, é bem conceituado, servindo como referência para muitos autores, inclusive para esse trabalho. O livro aborda a flexão de placas retangulares longas de uma superfície cilíndrica, a flexão pura de placas e a flexão simétrica de placas circulares.

Além disso, a dissertação sobre dimensionamento e análise numérica de cascas em concreto armado para aplicações em plataformas *offshore*, de Carlos Pitágoras Pereira Friaça (2006), trás grande contribuição para o estudo de dimensionamento das armaduras como também a fissura do concreto.

Mathias Andres-Reinhard Harte (2005) desenvolveram uma abordagem numérica simplificada para o estudo de flambagem em cascas de concreto. Neste mostra-se a aplicação do método dos elementos finitos na análise de flambagem, com boa acurácia

### **3 Metodologia de Pesquisa:**

No que se diz respeito à metodologia de pesquisa adotada para este trabalho podemos conceituar do ponto de vista da sua natureza como uma Pesquisa Aplicada. Em relação à abordagem do problema, apresentamos um tratamento quantitativo. Do ponto de vista dos objetivos optamos pela pesquisa explicativa, finalizando com os procedimentos técnicos, em que optamos pelo Estudo de caso. Em resumo este trabalho trata-se de uma pesquisa experimental, pois se adéqua ao problema em questão. Consiste em determinar um objetivo de estudo (análise estrutural linear elástica estática de cascas em concreto armado), selecionar os aspectos da qual a envolvem e influenciam analisar o comportamento e por fim aplicar os resultados da análise para verificação de armadura necessária a resistir os esforços.

### **4 Desenvolvimento e análise de cascas:**

Será utilizado programa SAP 2000 (V11) para realizar uma análise numérica via Método dos Elementos Finitos (*FEM* do acrônimo do inglês). O estudo é feito sobre o campo de deslocamentos e a partir destes são determinados: as deformações, tensões, momentos fletores e cortantes, seguindo esta ordem.

#### 4.1 Abordagem geral:

Para o prosseguimento do método de trabalho primeiramente mostraremos formulações e conceitos importantes que permitirão um entendimento da análise e do dimensionamento.

A Teoria de Placas, segundo Soriano (2003), foi apresentada por Sophie Germain (1776-1831) na Academia de Ciências de Paris em 1811 e suas diversas teorias se diferenciam basicamente quanto à idealização do efeito de esforço cortante. Na teoria clássica de Gustave Robert Kirchhof (1824-1887), apresentada em 1850, considerava-se inextensível a espessura e desprezam-se as deformações de esforço cortante, supondo que um segmento de reta normal à superfície média permanecesse retilíneo e perpendicular a essa superfície após a deformação da placa.

Esta Teoria (SORIANO, 2003) ou Teoria Clássica é adequada às placas finas, delgadas ou esbeltas, e adota a hipótese de Kirchhof-Love de que submetida à tensão normal, a superfície permanecer inalterada após a deformação. Na figura 2 as informações geométricas desta teoria são apresentadas.

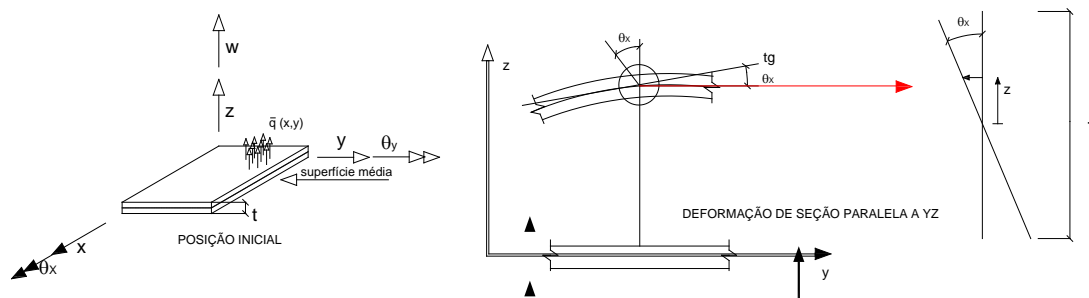


FIGURA 2 – Trecho de placa de espessura  $t$ , sob carregamento transversal  $q$  por unidade de área  
Fonte: (SORIANO, 2003).

O que está representado é um trecho de placa de espessura  $t$  sob um carregamento transversal onde  $q$  é a carga por unidade de área. Onde  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são as rotações da superfície média segundo os eixos  $x$  e  $y$ .

Equação diferencial da placa de Germin-Lagrange:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (1.0)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.0)$$

Onde:

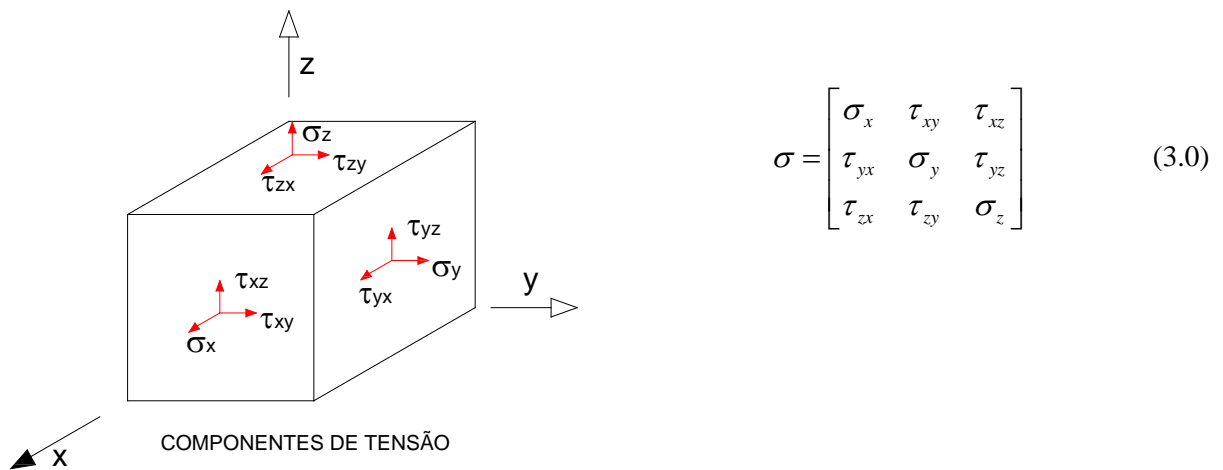
$w$  : é o deslocamento de um ponto da superfície média da placa na direção normal à superfície;

$u$  e  $v$  : são os deslocamentos fora da superfície média nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente;

$q$  : é a carga por área na superfície média;

$D$ : é a rigidez a flexão da placa

Na teoria da elasticidade tridimensional sabe-se que as tensões em um sólido são representadas conforme a figura 3:



A figura indica a presença de três tensões normais e seis cisalhantes representadas na equação 3.0. O estado plano de tensões é definido tomando às componentes na direção  $z$  iguais a zero.

$$\begin{aligned} \sigma_z = 0 \quad \tau_{xy} = \tau_{zx} = 0 \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0 \end{aligned} \quad (4.0)$$

Para definir os esforços atuantes nas placas é necessário utilizar a seguinte notação para representar as derivadas das componentes de deslocamento:

$$w_{,x} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad u_{,y} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad v_{,y} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad w_{,xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (5.0)$$

Portanto, as rotações podem ser descritas como:  $\theta_x = -w_{,y}$ , e  $\theta_y = w_{,x}$ .

A partir do conhecido, podemos obter os valores de  $u$  e  $v$  pelas derivadas em relações a  $x$  e  $y$  como segue abaixo:

$$\begin{aligned} v &= -z\theta_x = -zw_{,y} \\ u &= z\theta_y = -zw_{,x} \end{aligned}$$

Seguindo os sentidos positivos da figura 4, podem-se estabelecer as relações que definem os esforços atuantes:

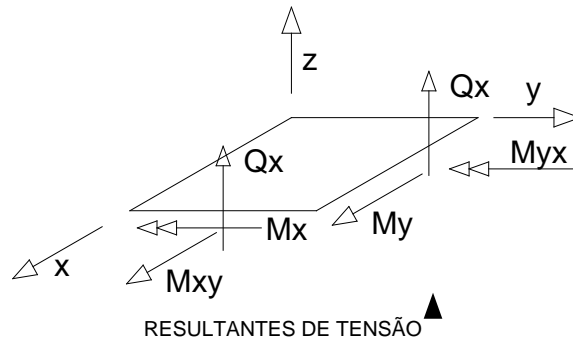


FIGURA 4 – Sentidos positivos das componentes de tensão e de suas resultantes. Podendo, estes serem avaliados da seguinte maneira:

Momento fletor de flexão no plano xz:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_x z dz \quad (6.0)$$

Momento fletor de flexão no plano yz:

$$M_y = - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_y z dz \quad (7.0)$$

Momento de torção:

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \quad (8.0)$$

Esforço Cortante associado a flexão de  $M_x$ :

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz \quad (9.0)$$

Como  $\sigma_z$  é muito menor do que a outra componente de tensão de flexão desconsidera-se.

Assume-se um estado plano de tensões, ou seja, a relação constitutiva é dada pela seguinte equação:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} \quad (10.0)$$

A equação informa a tensão para cada distância  $z$  da superfície média, sendo que  $[E]$  é a matriz de coeficientes elásticos do estado plano de tensões:

$$\begin{Bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} = [E] \{\varepsilon\} \quad (11.0)$$

$$[E] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} e \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (12.0)$$

Matriz de coeficientes elásticos e vetor de deformações em sentidos generalizados, pois se trabalha com resultantes de tensão.

O método dos elementos finitos aplicados a problemas da mecânica dos sólidos é abordado na forma de minimização da energia potencial total.

A equação de energia de deformação vem dada pelo produto interno entre tensões e deformações em todo domínio analisado:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \quad (13.0)$$

Onde substituindo as deformações de flexão das equações chega-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_A (-\sigma_x z w_{,xx} - \sigma_y z w_{,yy} - 2\tau_{xy} z w_{,xy}) dz dA \quad (14.0)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_A \begin{bmatrix} w_{,xx} & w_{,yy} & 2w_{,xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} dA = \frac{1}{2} \int_A \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dA \quad (15.0)$$

A equação da energia potencial total vem dada pela energia de deformação menos o trabalho externo realizado pelo carregamento:



$$\pi = \frac{1}{2} \int_A [w_{,ww} w_{,yy} 2w_{,xy}] [E] \left\{ \begin{matrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{matrix} \right\} dA - \int_A \bar{q} w dA \quad (16.0)$$

A condição de mínimo desse funcional fornece a equação diferencial de equilíbrio:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial w^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\bar{q}}{D} \quad (17.0)$$

A teoria de cascas finas, segundo SORIANO (2003), foi representada por H. Também por Aron em 1874 e por A. E.love em 1888, mas a sua aplicação na resolução de problemas de engenharia apenas foi realizada no início do século posterior, em 1983, por Timoshenko. Semelhante às placas, as teorias de cascas se diferem basicamente quanto à idealização das deformações de esforço cortante. Podem ser classificadas em teorias de cascas finas ou clássicas, teorias com as hipóteses de Reissner–Mindlin denominadas teorias de primeira ordem, teorias de ordem superior e teorias de camadas discretas.

Nas teorias clássicas desprezam-se as deformações de esforço cortante, considerando que em um segmento de reta normal, a superfície média da casca permaneça retilínea e normal à esta superfície após a deformação da mesma. Com as hipóteses de Reissner-Mindlin, aquele segmento permanece retilíneo, mas não mais normal à superfície média. Nas teorias de ordem superior adotam-se leis polinomiais não lineares para definir o encurvamento daquele segmento após a deformação, em modelo matemático mais próximo do sistema físico do que nas teorias anteriores.

Nas teorias de camadas discretas, adequadas às cascas laminadas, adotam-se campos de deslocamentos lineares por segmentos ao longo da espessura, impondo adequadas condições de contato nas interfaces entre lâminas. Todos os modelos em casca guardam aproximações em relação ao modelo tridimensional da teoria da elasticidade, mas tem a vantagem de operar com um menor número de grandezas do que este último modelo e permitirem com facilidade o cálculo de resultantes de tensões.

O efeito de flexão esta associado às resultantes de tensão  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$ ,  $Q_x$  e  $Q_y$  que no caso de espessura pequena em relação aos raios de curvatura da casca tem as mesmas expressões que em placa. As componentes de tensão do efeito de membrana são as mesmas que ocorrem no estado plano de tensões, embora consideradas através de suas resultantes por unidade de comprimento da superfície de referência. Tomando o referencial xyz com origem

nesta relação, aos raios de curvatura da casca, pra os sentidos positivos os esforços de membrana se escrevem:

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz \quad (18.0)$$

$$N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz \quad (19.0)$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \quad (20.0)$$

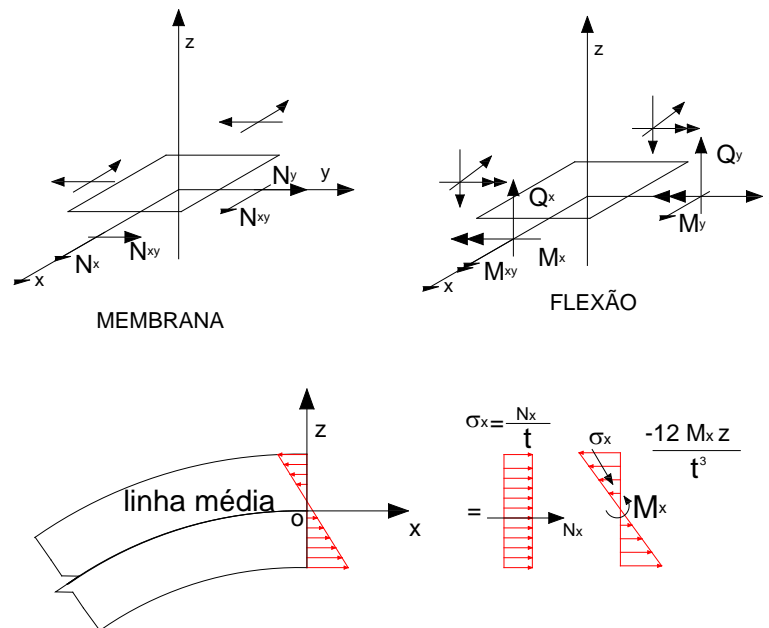


FIGURA 5 – Resultantes de tensão em casca e efeitos de membrana e de flexão.

Fonte: (SORIANO, 2003)

Onde:

$N_x$ : é o esforço normal na direção x;

$N_y$ : é o esforço normal na direção y;

$N_{xy}$  e  $N_{yx}$ : é o esforço normal na direção x;

$\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  é a tensão normal nas direções x e y que provocam extensão da superfície média e momento fletor. À medida que cresce o efeito de membrana relativamente ao de flexão, modificações de forma, de condições de apoio e/ou de carregamento, aumenta a capacidade de carga da casca.

#### 4.2 Efeitos de membrana e de flexão:

Segundo Soriano (2003), entre os modelos matemáticos bidimensionais, o modelo de casca é o que tem apresentado maiores dificuldades para o desenvolvimento de elementos finitos robustos e eficientes. A formulação de elementos de dupla curvatura, diretamente a

partir de teoria clássica de casca requer campo de deslocamento polinomial de quinto grau com correspondente elevado número de parâmetros nodais e se aplica a cascas abatidas ou finas. Assim é prático desenvolver elementos de casca por: (1) associação de elementos de estado plano de tensões e de flexão de placa, ou (2) degeneração de elementos tridimensionais curvos em elementos de superfície, adotando restrições cinemáticas e mecânicas de forma a incorporar hipóteses de cascas, usualmente às de Reissner-Mindlin. Evita-se dessa forma, o uso de elaboradas teorias de casca e da geometria diferencial. São essas duas abordagens em casca isótropa e homogênea na espessura.

### 5 Aplicação Prática:

Primeiramente deve ser detalhado o modelo de estudo, informada as dimensões e características dos materiais empregados, ou seja, resistência do concreto ( $F_{ck}$ ) e módulo de elasticidade ( $E$ ). Trata-se de um modelo de 2 (duas) baias sendo a primeira de raio  $R= 6.0$  metros e a segunda com  $\frac{1}{4}$  de circunferência e comprimento de 12m, sendo a espessura adotada foi de 20 cm. As características do material considerado para as análises foi concreto de  $F_{ck} = 25$  Mpa e módulo de elasticidade  $E= 28000$  Mpa. Não será considerada a sobrecarga, apenas o peso próprio.

Como mencionado anteriormente para análise do modelo, foi utilizado o software (SAP V11). A primeira baia foi considerada engastada em seus dois apoios e a segunda baia engastada ao primeiro e simplesmente apoiada ao segundo, como indica a figura 6 abaixo:

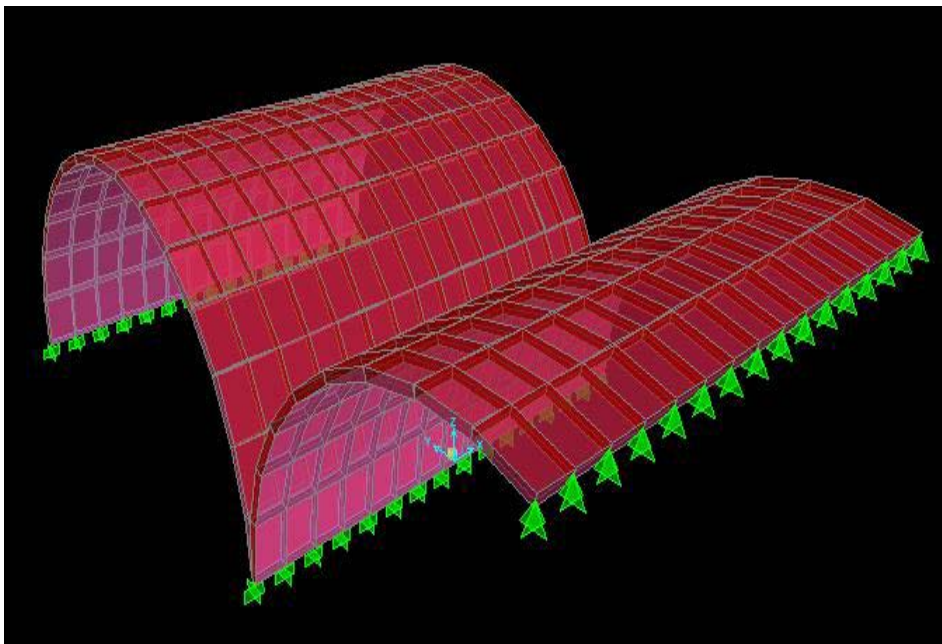


FIGURA 6 – Estrutura gerada

Os valores dos esforços obtidos, ou seja, tensão normal ( $N_z$ ) e momentos fletores ( $M_x$ ) e ( $M_y$ ) serão expressos em diagramas como os que seguem nas figuras abaixo:

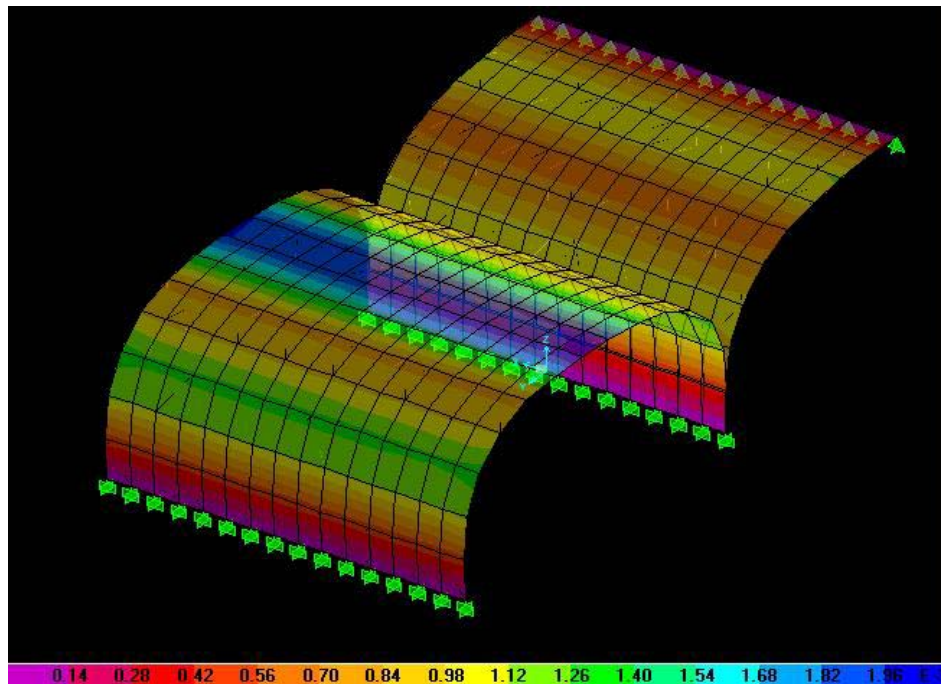


FIGURA 7 – Deformações

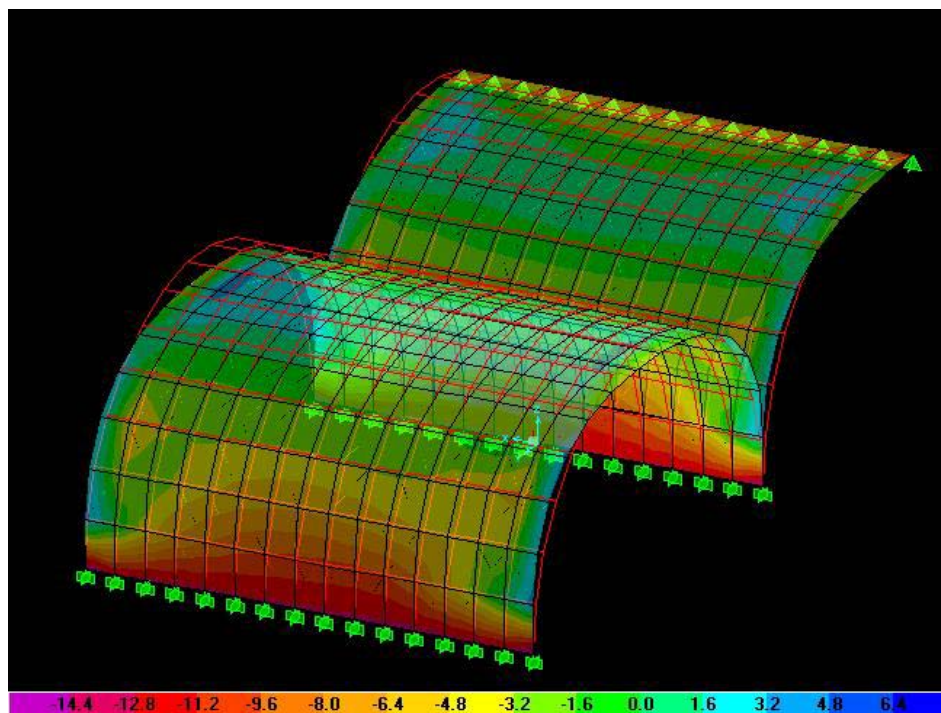


FIGURA 8 – Forças Normais Máximas

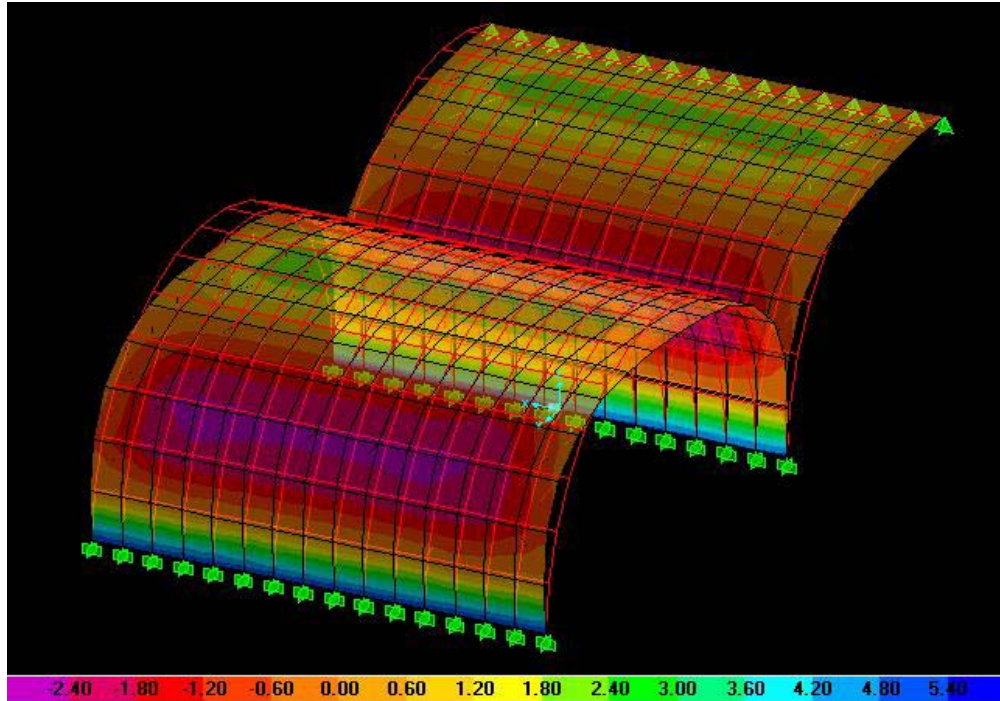


FIGURA 9 – Momentos fletores em y ( $M_y$ ) (kN.m)

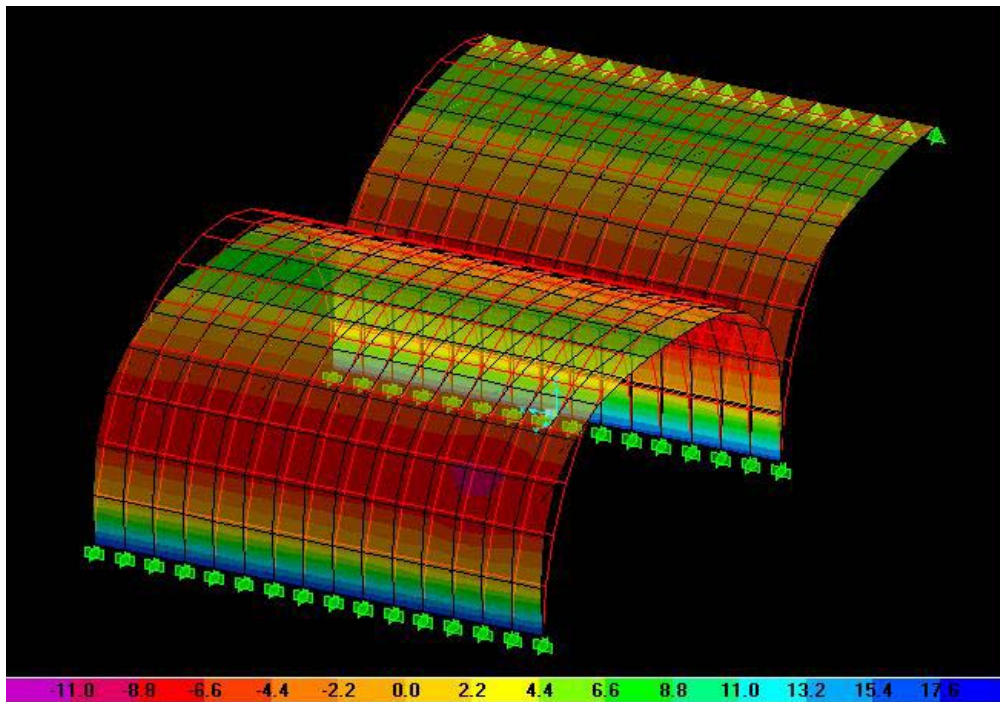


FIGURA 10 – Momentos fletores na direção x ( $M_x$ ) (kN.m)

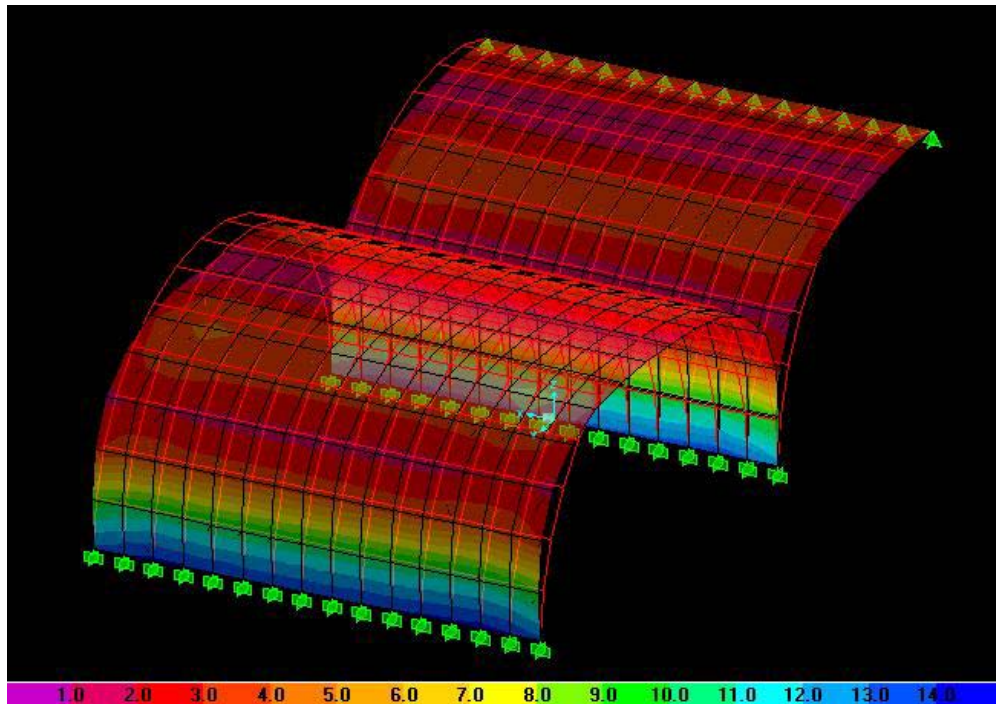


FIGURA 11 –Força Cortante (kN.m)

Com os resultados obtidos podemos agora realizar uma análise das armaduras necessárias para resistir os esforços da casca. Observando os diagramas de esforços obtivemos a tensão normal, momentos fletores nas direções  $x$  e  $y$  e esforços cortantes. A partir desses resultados decidiu-se realizar a análise através da flexo-compressão que leva em conta que qualquer ponto da superfície da seção representa um estado de limite último onde pode-se variar a quantidade de armadura e conseqüentemente as bitolas das mesmas.

Devido a um elemento de casca possuir o efeito de membrana, onde temos a existência dos respectivos esforços citados anteriormente, foi realizada a divisão de cada uma das duas baias em seções. Cada seção terá seus esforços normais, momentos fletores e cortantes utilizando o programa para flexão oblíqua (OBLIQUA 1.0).

Chegou-se a armaduras necessárias para resistir aos esforços solicitantes através do diagrama de interação de momentos fletores em  $M_x$  e  $M_y$ . Vale lembrar que o objetivo deste trabalho é realizar uma análise de comportamento estrutural de cascas, portanto, normas de armadura mínimas não foram adotadas. As figuras seguintes ilustram as seções e esforços solicitantes.

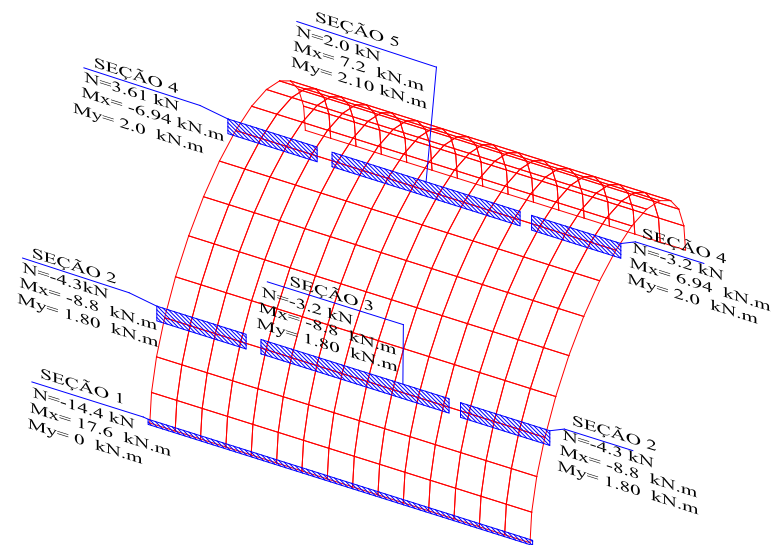


FIGURA 12 – BAIA 1  
Divisões das seções e esforços atuantes.

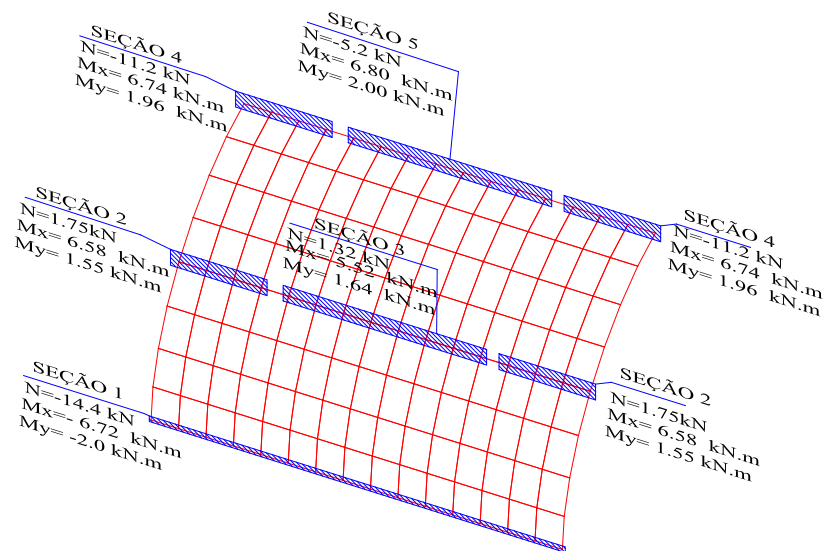


FIGURA 13 – BAIA 2  
Divisões das seções e esforços atuantes.

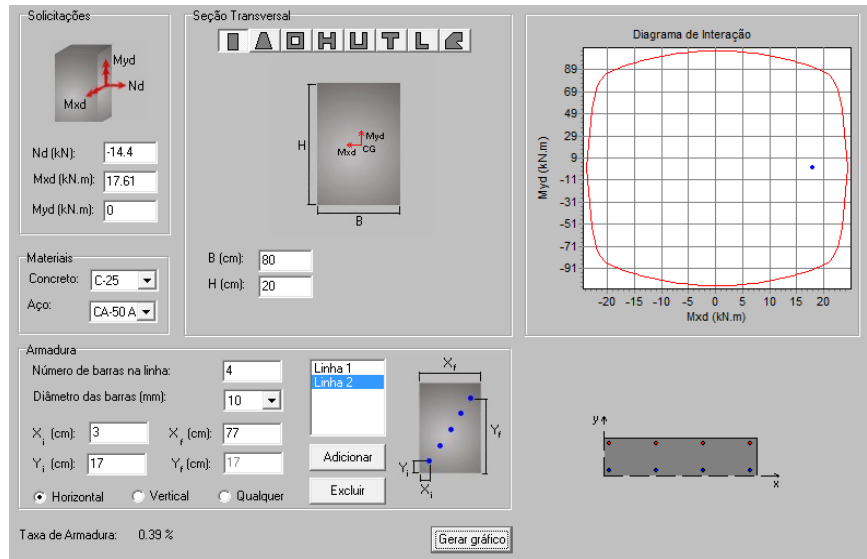


FIGURA 14 – Diagrama de interações  
Seção 1 BAIA 1.

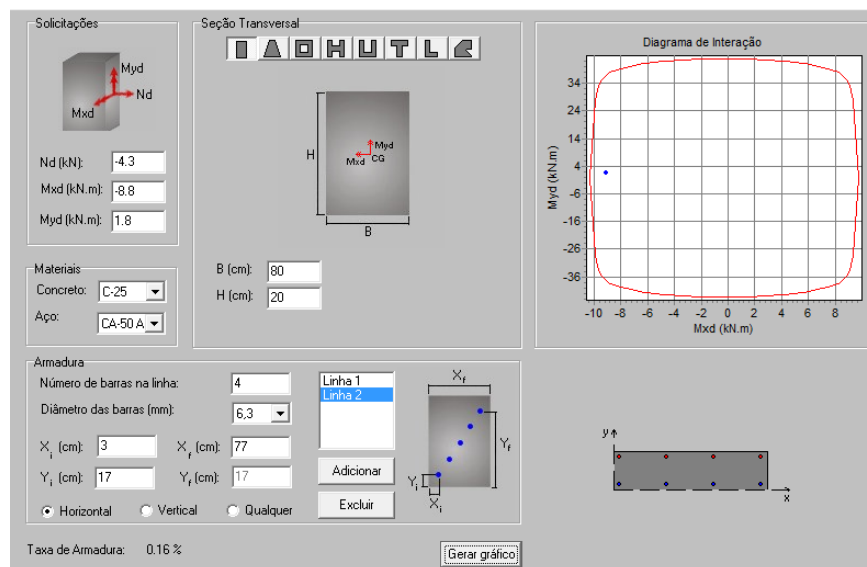


FIGURA 15 – Diagrama de interações  
Seção 2 baia 1.



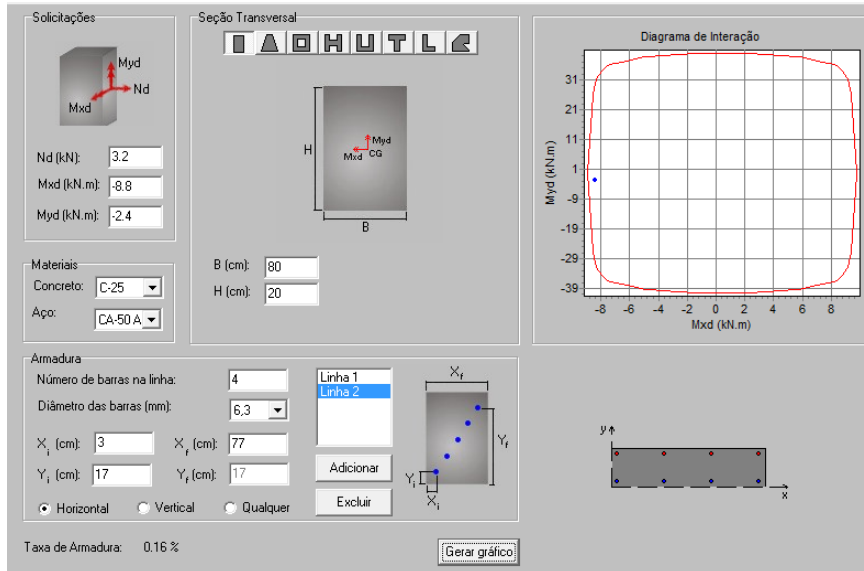


FIGURA 16 – Diagrama de interações  
Seção 3 Baia 1.

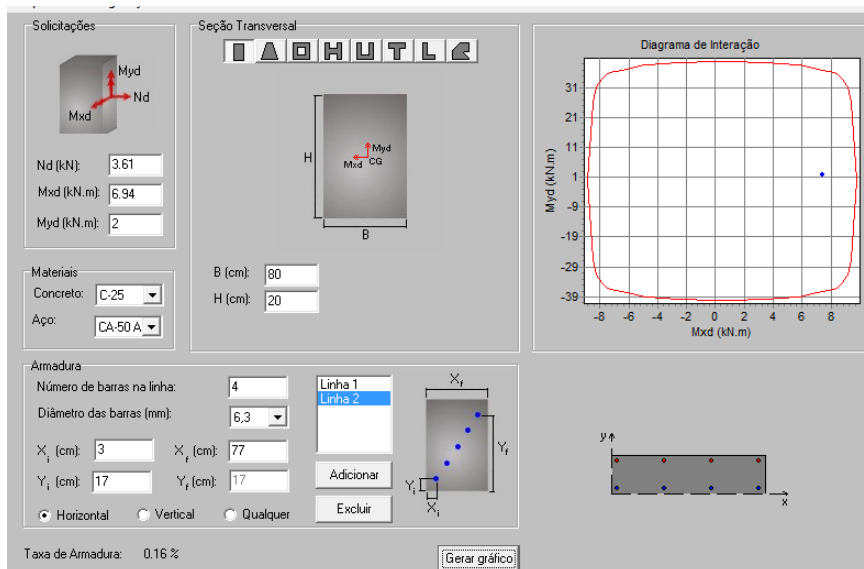


FIGURA 17 – Diagrama de interações  
Seção 4 Baia 1.

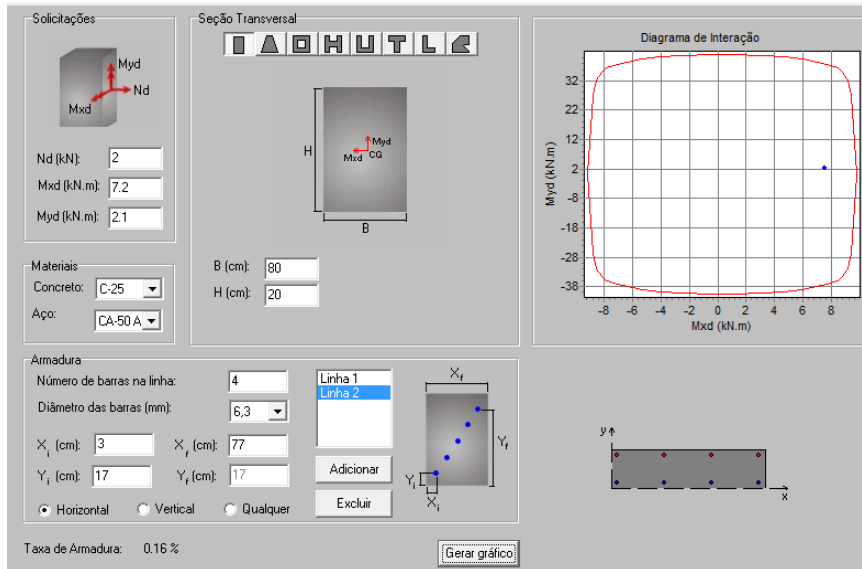


FIGURA 18 – Diagrama de interações  
Seção 5 Baia 1.

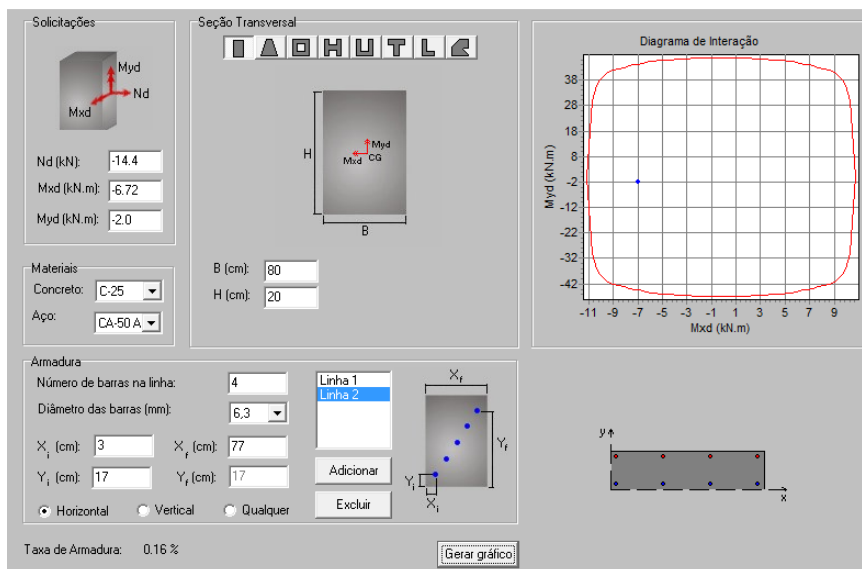


FIGURA 19 – Diagrama de interações  
Seção 1 Baia 2.

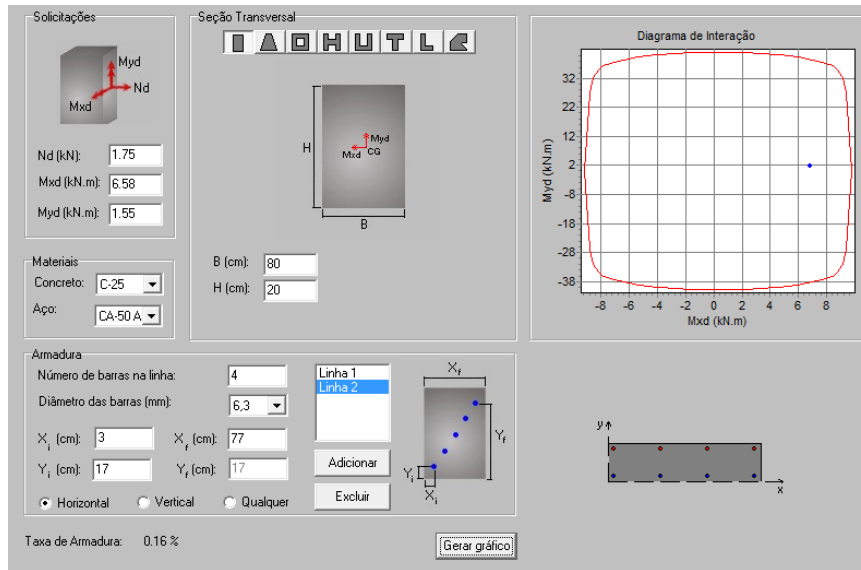


FIGURA 20 – Diagrama de interações  
Seção 2 Baia 2.

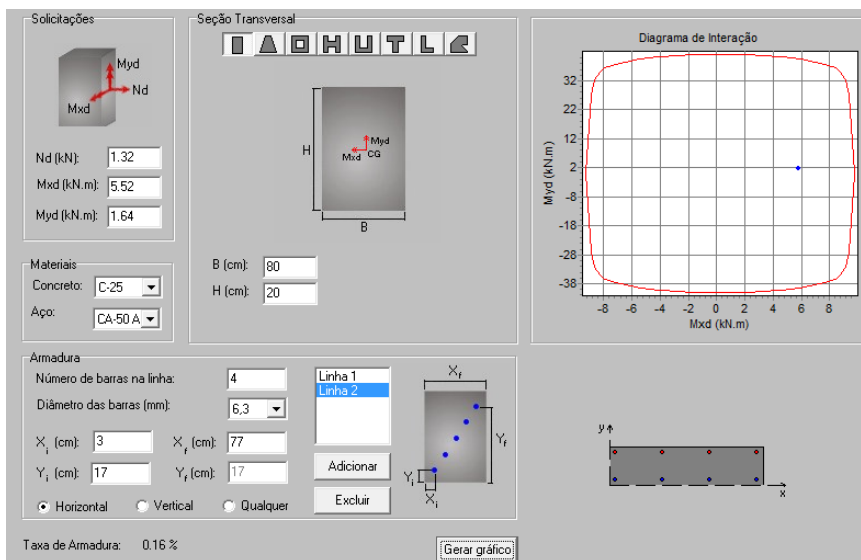


FIGURA 21 – Diagrama de interações  
Seção 3 Baia 2.

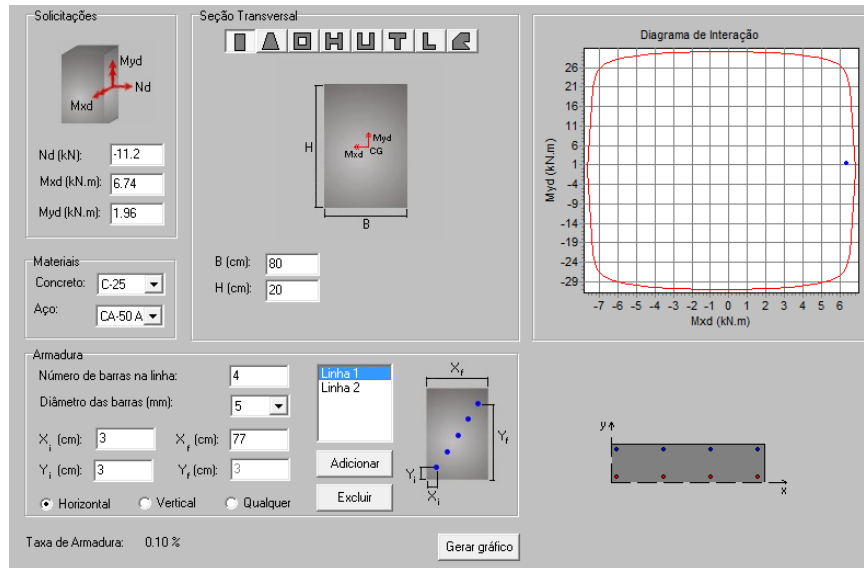


FIGURA 22 – Diagrama de interações  
Seção 4 Baia 2.

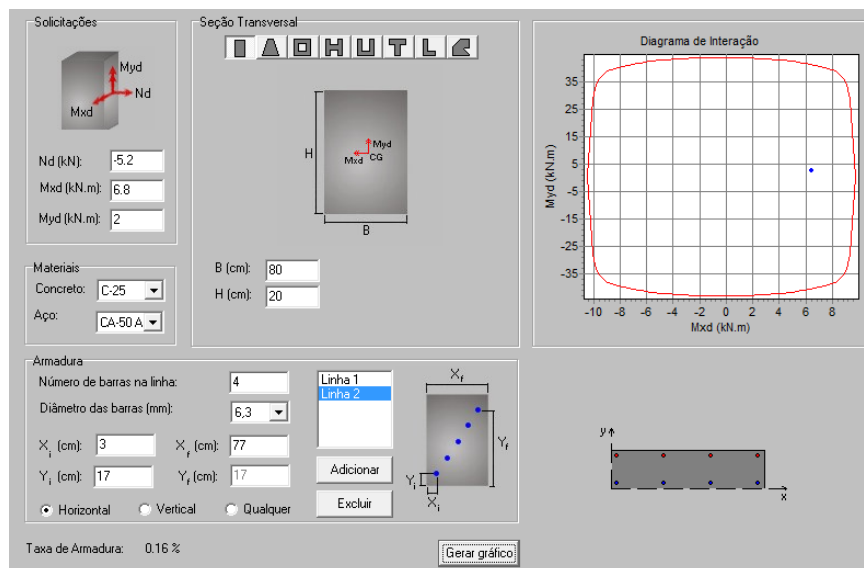


FIGURA 23 – Diagrama de interações  
Seção 5 Baia 2.

### Considerações Finais:

Após todos os dados coletados pode-se observar a complexidade dessa estrutura em vários pontos: a geometria é simples, mas não possui uma análise trivial, tendo em vista seu caráter tridimensional. A casca é submetida às inúmeras variações dos esforços e deformações em todo o seu corpo. As concentrações de tensões e esforços são maiores em seus apoios e no centro. Já no ponto de vista mecânico, existe a possibilidade de diminuir um pouco mais os deslocamentos, aumentando a espessura adotada, mas tendo em vista os resultados obtidos

eles foram satisfatórios. Outro artifício também pode ser adotado aumentando o  $F_{ck}$ , tendo em vista que o esforço de compressão é muito alto nesse tipo elemento. Do ponto de vista mecânico, pôde-se evidenciar um fator que contribui para obter um deslocamento satisfatório: o engastamento da base da primeira baia e o primeiro apoio da segunda, também considerando a segunda baia simplesmente apoiada. Contudo, isso também acarretou o aumento do valor dos momentos negativos em seus apoios.

Em relação ao esforço cortante não foi indicada uma solução de armadura resistente. Há a possibilidade de uma adaptação da tese de mestrado de Carlos Pitágoras (2009), que usa o chamado “método sanduiche” para transferência de esforços em lajes.

A flambagem também é um aspecto que pode ser estudado posteriormente a partir desse trabalho, com a contribuição da análise do modelo apresentado.

A maior relevância do trabalho é proporcionar uma idealização do comportamento estrutural de cascas. Para fins de aplicação direta de dimensionamento desse tipo de elemento é demandado um maior número de estudos que possam ser utilizados como referencial teórico dando suporte a análises mais profundas e detalhadas de todas as formulações e conceitos aqui apresentados.

Para estudos futuros fica a partir deste trabalho fica como sugestão um estudo sobre a flambagem, como também o dimensionamento das armaduras para o esforço cortante deste elemento estrutural.

### **Referências bibliográficas:**

ALMEIDA, Felipe Schaedler. **Otimização de Estruturas de Materiais Compósitos Laminados utilizando Algoritmos Genéticos**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – UFRGS, 2006, Porto Alegre.

FRIAÇA, Carlos Pitágoras Pereira. **Dimensionamento e Análise Numérica de Cascas de Concreto Armado para Aplicações em Plataformas Offshore**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – UNESP, 1999, Ilha Solteira.

POLAK, Maria Anna e VECCHIO, Frank J. Reinforced Concrete Shell Elements Subjected to Bending and Membrane Loads. **ACI STRUCTURAL JOURNAL – TECHNICAL PAPER**. Title n. 91-S25, p.261-268, May-June, 1994.

SORIANO, Humberto Lima. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003.

TIMOSHENKO, S.; WOINOWKY-KRIEGER, S. **Theory of Plates and Shells**. Estados Unidos: Mc-Graw Hill Book Comny, 2ª edição, 1959.

VAZ, Luiz Eloy. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. Editora Campos 2010.