

# *Revista da Graduação*

---

Vol. 6

No. 1

2013

19

---

**Seção:** Faculdade de Matemática

**Título:** MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PERSPECTIVA SOBRE O  
VÍRUS INFLUENZA A (H1N1) 2009

Autor: PAULA CASTILHOS LA ROCCA E VANESSA MARTINS DE SOUZA

Este trabalho está publicado na Revista da Graduação.

ISSN 1983-1374

<http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/graduacao/article/view/13775>

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL  
FACULDADE DE MATEMÁTICA

PAULA CASTILHOS LA ROCCA  
VANESSA MARTINS DE SOUZA

**MODELAGEM MATEMÁTICA:**  
**uma perspectiva sobre o vírus Influenza A (H1N1) 2009**

Porto Alegre

2012

PAULA CASTILHOS LA ROCCA  
VANESSA MARTINS DE SOUZA

**MODELAGEM MATEMÁTICA: uma perspectiva sobre o vírus  
Influenza A (H1N1) 2009**

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática: linha de formação Matemática Empresarial pela Faculdade de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

**Orientadores: Prof. Dr. Augusto Vieira Cardona  
Profa. Dra. Maria Salett Biembengut**

Porto Alegre  
2012

PAULA CASTILHOS LA ROCCA  
VANESSA MARTINS DE SOUZA

**MODELAGEM MATEMÁTICA: uma perspectiva sobre o vírus  
Influenza A (H1N1) 2009**

Trabalho de conclusão de curso  
apresentado como requisito parcial para a  
obtenção do título de Bacharel em  
Matemática: linha de formação Matemática  
Empresarial pela Faculdade de Matemática  
da Pontifícia Universidade Católica do Rio  
Grande do Sul.

Aprovado em: \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

**BANCA EXAMINADORA:**

Prof. Dr. Augusto Vieira Cardona (orientador)

---

Profa. Dra. Maria Salett Biembengut (orientadora)

---

Prof. Dr. Luiz Eduardo Ourique

---

Porto Alegre

2012

Dedicamos esse trabalho aos  
nossos pais pelo apoio e incentivo  
nessa etapa educacional de nossas  
vidas. Sem eles, esse trabalho e muitos  
dos nossos sonhos não se realizariam.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao professor Augusto Vieira Cardona, pela paciência na orientação e incentivo nos momentos difíceis durante o desenvolvimento desta monografia.

À professora Maria Salett Biembengut e ao professor Luiz Eduardo Ourique que dedicaram seu tempo e sua sabedoria para contribuir na construção deste trabalho.

Aos professores Lori Viali, da Faculdade de Matemática, e Virgínia Minghelli Schmitt, da Faculdade de Farmácia, que nos cederam referenciais teóricos sobre os temas específicos desta monografia.

A todos os professores e funcionários do Curso de Bacharelado em Matemática, que foram tão importantes na nossa trajetória acadêmica e na nossa formação como profissionais.

Aos colegas de faculdade, não só pela convivência nesses anos, mas especialmente, por fazer parte de nossos caminhos.

“Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o maior prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a presença, mas o ato de atingir a meta.”

**Carl Friedrich Gauss**

## RESUMO

O objetivo principal dessa monografia foi identificar dados referentes aos casos de infecção pelo vírus Influenza A (H1N1) 2009 no Estado do Rio Grande do Sul entre os meses de janeiro e outubro de 2012, com a intenção de desenvolver um modelo matemático que possibilitasse a compreensão do comportamento do vírus em sua fase pós-pandêmica. Como hipótese inicial para a elaboração desse modelo, tomou-se por ajustar os dados coletados a uma curva gaussiana. Para realizar a modelagem, buscou-se embasamento teórico de pesquisadores do tema das diferentes áreas do conhecimento e da matemática envolvida na situação-problema. Os conteúdos matemáticos requeridos para a resolução do modelo foram o método de ajuste de curvas e o método de Gauss. Uma planilha no programa computacional *Excel* foi desenvolvida para auxiliar na resolução do sistema de equações encontradas e na validação do modelo matemático proposto. Na análise dos resultados, identificou-se que a curva gaussiana mostrou-se inadequada à situação-problema, sendo necessário reconsiderar as hipóteses iniciais e decidir por um novo modelo. Como perspectiva futura espera-se, aplicar o modelo apresentado nesta monografia, em diversas abordagens metodológicas, como proposta para a busca de explicação e previsão de um padrão de sazonalidade para o vírus Influenza A (H1N1) 2009, bem como determinar possíveis intervalos de ocorrências de infecção.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática. Ajuste de curvas. Vírus influenza.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1– Processo da modelagem matemática.....	16
Figura 2– Dinâmica da modelagem matemática.....	17
Figura 3– <i>Diferentes curvas normais</i> .....	22
Figura 4– <i>Variações na curva normal</i> .....	23
Figura 5– <i>Estrutura genética do vírus Influenza</i> .....	25
Figura 6- Casos notificados de SRAG e confirmados de Influenza A (H1N1) 2009 segundo semana de início de sintomas, RS, até 10/10/12. ....	28
Figura 7– Casos confirmados de Influenza A (H1N1) 2009 no RS, até semana 40/2012 .....	29
Figura 8 – Casos confirmados de Influenza A (H1N1) 2009 no RS, até semana 40/2012 com aproximação de uma curva .....	30
Figura 9– Planilha utilizada na resolução do sistema.....	32
Figura 10– Tentativa de conferir simetria à curva (n = 23) .....	39
Figura 11– Tentativa de conferir simetria à curva (n = 11) .....	39

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Casos e óbitos notificados de SRAG e confirmados de Influenza A (H1N1) 2009, RS entre os anos de 2009 e 2012.....	28
Tabela 2– Casos confirmados de Influenza A (H1N1) 2009 no RS, até semana 40/2012.....	29
Tabela 3– Valores de $(x_i, y_i)$ .....	30

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>11</b>
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>13</b>
2.1 MODELAGEM E MODELOS MATEMÁTICOS .....	14
2.2 AJUSTE DE CURVAS .....	17
<b>2.2.1 Ajuste linear .....</b>	<b>19</b>
<b>2.2.2 Ajuste exponencial .....</b>	<b>20</b>
2.3 A CURVA DE GAUSS.....	21
<b>3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS .....</b>	<b>24</b>
3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA: INFECÇÃO PELO VÍRUS INFLUENZA A (H1N1) 2009 .....	24
<b>3.1.1 Interação.....</b>	<b>27</b>
<b>3.1.2 Matematização .....</b>	<b>28</b>
<b>3.1.3 Modelo matemático .....</b>	<b>33</b>
<b>3.1.3 Modelo matemático .....</b>	<b>33</b>
<b>4 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>45</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>47</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Nesta apresentação, far-se-á uso do verbo na primeira pessoa do plural. Isto porque julgou-se relevante expressar um memorial de ambas estudantes nessa etapa de conclusão de curso.

A elaboração desta monografia configura-se no trabalho mais desafiante a que fomos instruídas a realizar durante a nossa formação como bacharéis em Matemática. Ao longo do curso, foi possível identificar a aplicabilidade da Matemática em diversas áreas do conhecimento como Administração, Engenharia e Informática. Entretanto, nenhuma delas foi tão significativa quanto o trabalho de Modelagem Matemática, desenvolvido nesta monografia.

Estudar, descobrir e entender a Modelagem Matemática como um método de pesquisa, proporcionou-nos experiências que agregaram valor à nossa formação e que se configuram como diferenciais em nossos perfis como profissionais.

A tentativa de compreender e explicar os fenômenos a nossa volta foram propulsores na escolha do tema deste estudo, pois acreditamos que relacionar e utilizar a Matemática como meio de propor soluções e respostas para os problemas da atualidade, é nosso papel primordial.

O vírus Influenza A (H1N1) foi responsável, no ano de 2009, por 298 casos de óbitos no Estado do Rio Grande do Sul e em 2012, até o início do nosso estudo, por 214 óbitos notificados, sendo 67 confirmados decorrentes de infecção pelo vírus (CENTRO ESTADUAL DE VIGILÂNCIA EM SAÚDE, 2012). A possibilidade de contribuir para a prevenção e para futuros estudos sobre o tema, na área de Matemática, caracterizou-se como nosso objetivo fundamental.

A elaboração do modelo matemático foi embasada em referenciais teóricos das áreas de conhecimento envolvidas no processo, atribuindo um caráter interdisciplinar, visto que foi necessário estudarmos temas da Biologia e da Matemática.

Aprender a modelar é um processo complexo que requer dedicação e tempo de estudo. Idealizar, desenvolver e concluir essa monografia, é fruto de um período, embora pequeno, mas de intenso trabalho.

O desenvolvimento do nosso modelo restringiu-se à aplicação do Método dos Mínimos Quadrados para o ajuste dos dados referente aos casos de infecção pelo vírus Influenza A (H1N1) 2009, no Estado do Rio Grande do Sul. Contudo,

sugerimos que diversas abordagens metodológicas da utilização desses dados, bem como do modelo matemático, sejam aprofundados em estudos futuros realizados por nós ou por outros alunos do Curso de Matemática.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O tema Modelagem Matemática se faz presente em várias áreas do conhecimento, por exemplos: na Biologia, na Informática e na Moda.

- Na modelagem molecular: *“a modelagem molecular compreende um número de ferramentas e métodos computacionais e teóricos que tem como objetivo entender e prever o comportamento de sistemas reais; usadas para descrever e prever estruturas moleculares, propriedades do estado de transição e equilíbrio de reações, propriedades termodinâmicas, entre outras”* (BRITO, 2009).
- Na modelagem de dados: *“um modelo é uma simplificação da realidade de forma a entender aquilo que estamos modelando já que aquilo que modelamos é complexo, pois, de alguma forma, não podemos compreendê-lo por inteiro”* (RUMBAUGH, 2000 apud CAMPOS, 2008, p. 121).
- Na modelagem de roupas: *“modelar consiste na interpretação do modelo sobre a base, ou seja, na concretização das idéias do designer de moda e das informações registradas na ficha técnica do produto* (SILVEIRA, 2006 apud BORBAS; BRUSCAGIM, 2007, p. 156)”.*”*

Na Matemática é mais usual em áreas da Matemática Aplicada, como a Pesquisa Operacional, Programação Linear e Equações Diferenciais.

- Na Pesquisa Operacional: *“um modelo é uma representação de um sistema real, que pode já existir ou ser um projeto aguardando execução. No primeiro caso, o modelo pretende reproduzir o funcionamento do sistema, de modo a aumentar sua produtividade. No segundo caso, o modelo é utilizado para definir a estrutura ideal do sistema”* (LISBOA, [20--?]).
- Na Programação Linear: *“o modelo matemático de programação linear reduz um sistema real (situação-problema) a um conjunto de equações ou inequações a fim de otimizar (maximizar ou minimizar) uma função objetivo”* (GOLDBARG, 2000 apud REHFELDT 2009, p. 64).
- Nas Equações Diferenciais: *“as equações diferenciais surgem a partir da tentativa de formular, ou descrever, certos sistemas físicos em termos matemáticos, ou seja, fazer uma modelagem matemática do problema”* (SANTOS; BONFIM, 2005, p. 127).

Nesta seção apresentam-se as considerações necessárias para o entendimento do processo de elaboração de um modelo matemático, buscando referencial teórico em pesquisadores na área de modelagem matemática.

## **2.1 MODELAGEM E MODELOS MATEMÁTICOS**

A modelagem matemática é um método de pesquisa que visa, por meio da aplicabilidade da matemática, descrever determinados fenômenos ou situações a fim de prever ou explicar seus comportamentos. De acordo com Bassanezi, “a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (2002, p. 16). Biembengut e Hein dizem que a modelagem matemática trata-se de

um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas (BIEMBENGUT & HEIN, 2011, p. 12).

Segundo Bassanezi (2002, p. 18), o *modelo matemático* é resultado de um processo de interpretação de situações reais, na busca de uma solução de compreensão da realidade.

Conforme o autor,

o objetivo fundamental do “uso” de matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem (BASSANEZI, 2002, p.18).

Um modelo pode ser formulado a partir de um conjunto de dados que, traduzidos para uma linguagem matemática, descrevam ou ilustrem de alguma forma o fenômeno ou objeto que se deseja estudar.

Bassanezi (2002, p. 20) define dois tipos de modelos: *objeto* e *teórico*. O modelo objeto consiste em descrever determinado fato ou objeto. Para o autor, “suas características predominantes são a estabilidade e a homogeneidade das variáveis” (BASSANEZI, 2002, p. 20). O modelo teórico está relacionado a uma teoria e “deve conter as mesmas características que o sistema real”. (BASSANEZI, 2002, p. 20).

A elaboração de um modelo depende, além da natureza dos fenômenos ou situações analisadas, do tipo de matemática necessária para resolver tais situações, podendo exigir um conhecimento matemático mais elementar ou mais sofisticado.

Para Bassanezi (2002, p. 20) a matemática utilizada para descrever um modelo, possibilita classificá-los de acordo com a aplicabilidade dos conceitos envolvidos, a saber: *linear* ou *não-linear*; *estático* ou *dinâmico*; *educacional* ou *aplicativo* e; *estocástico* ou *determinístico*.

Segundo o autor, define-se um modelo do tipo linear, ou não-linear, a partir da presença, ou ausência, desta característica nas equações. O modelo estático descreve o formato do objeto, enquanto o modelo dinâmico apresenta variantes para o fenômeno. Os modelos educacionais e aplicativos recebem essa classificação baseados no número de suposições ou hipóteses envolvidas no processo de resolução. Já os modelos estocásticos ou determinísticos dependem da previsão do número de variáveis utilizadas em suas equações.

Para o autor,

a modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele (BASSANEZI, 2002, p. 24).

Essas aproximações nem sempre condizem com a realidade ou servem como representação de um sistema ou parte dele.

Biembengut classifica a modelagem matemática em duas categorias “não necessariamente disjuntas: uma, refere-se à expressão física e outra, a expressão abstrata” (2004, p. 20).

A autora explica:

*Nesses termos, denomino estas duas categorias de modelagem matemática física e modelagem matemática simbólica.*

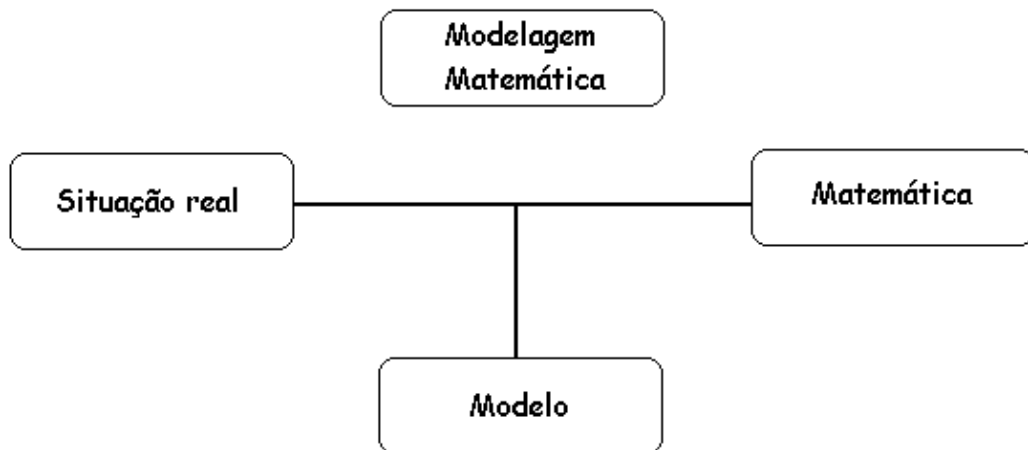
*A modelagem matemática física constitui em um processo envolvido na expressão, na reprodução e/ou na descrição de um conjunto de dados ou de imagem ou um ente físico. O modelo resultante desta forma de modelar pode ser de escala (desenho e/ou réplica) ou de analogia (representação gráfica e/ou algébrica).*

*A modelagem matemática simbólica constitui em um processo envolvido na compreensão e na análise de um conjunto de dados de um ente físico (produto ou processo), da natureza ou do ambiente social. O modelo simbólico resultante requer uma teoria matemática e/ou das demais áreas envolvidas mais complexas. (BIEMBENGUT, 2004, p. 20).*



Dessa forma, a modelagem matemática pode ser entendida como o elo entre a matemática e a realidade. Biembengut e Hein (2011, p. 13), ilustram o processo da modelagem matemática como meio de interação entre a matemática e a realidade, exemplificado na Figura 1.

**Figura 1– Processo da modelagem matemática**



Fonte: Extraído de BIEMBENGUT & HEIN (2011, p. 13)

A interação entre a matemática e a realidade “envolve uma série de procedimentos” (BIEMBENGUT e HEIN, 2011, p. 13): a *interação*, a *matematização* e o *modelo matemático*.

Segundo os autores, a etapa da interação é o momento em que é feito o aprofundamento do assunto, levantando-se dados sobre o tema de estudo. A transformação desses dados em linguagem matemática ocorre na etapa de *Matematização*. Essa etapa, conforme os autores, “subdivide-se em formulação do problema e resolução” (BIEMBENGUT & HEIN, 2011, p. 14). A formulação do modelo consiste em chegar a um conjunto de argumentos matemáticos que possibilite ou aponte uma solução para a situação problema.

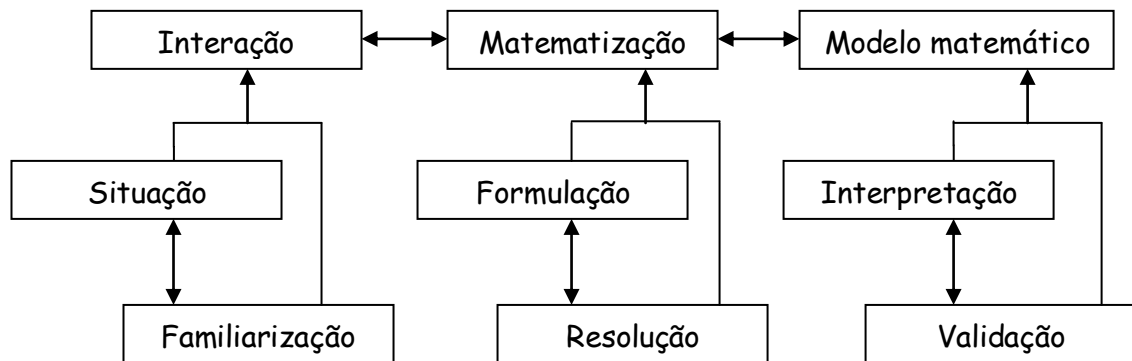
A resolução ou análise da situação-problema exige um conhecimento sobre os processos matemáticos utilizados na formulação. Conforme Bassanezi “a resolução de modelos é uma atividade própria do matemático, podendo ser completamente desvinculada da realidade modelada” (BASSANEZI, 2002, p.30).

Formulado o modelo, “torna-se necessária uma avaliação para verificar em que nível ele se aproxima da situação-problema representada, e a partir daí, verificar o grau de confiabilidade na sua utilização” (BIEMBENGUT & HEIN, 2011, p. 15).

Segundo Biembengut e Hein,

se o modelo não atender às necessidades que o geraram, o processo deve ser retomado na segunda etapa – matematização – mudando-se ou ajustando hipóteses, variáveis, etc. (BIEMBENGUT & HEIN, 2011, p. 15).

**Figura 2– Dinâmica da modelagem matemática**



Fonte: Extraído de BIEMBENGUT & HEIN (2011, p. 15).

Conforme Bassanezi, “a aplicabilidade de um modelo depende substancialmente do contexto em que ele é desenvolvido” (BASSANEZI, 2002, p. 31).

Neste estudo propõem-se a identificar dados referentes aos casos de infecção pelo vírus Influenza A (H1N1) 2009 no Estado do Rio Grande do Sul entre os meses de janeiro e outubro de 2012, com a intenção de desenvolver um modelo matemático analógico (BIEMBENGUT, 2004, p. 20) que possibilite a compreensão do comportamento do vírus em sua fase pós-pandêmica no Estado.

Para formular o modelo matemático, é necessário realizar um embasamento teórico da matemática envolvida no problema que se espera resolver, para entender, inferir e/ou alterar. Nesta fase inicial de estudo, os primeiros conteúdos matemáticos requeridos, foram o método de ajuste de curvas e a curva de Gauss.

## **2.2 AJUSTE DE CURVAS**

Segundo Burden e Faires,

o estudo da teoria da aproximação envolve dois tipos gerais de problemas. Um problema surge quando uma função é dada de forma explícita, mas queremos encontrar um tipo mais “simples” de função, tal como um polinômio, que possa ser utilizado para determinar valores aproximados da função dada. O outro problema da teoria da aproximação está relacionado ao ajuste de funções aos pontos

dados e a determinação da “melhor” função em certa classe para representar os dados (2008, p. 459).

Para determinar essa curva, pode-se utilizar um processo de interpolação ou de ajuste de curvas. A interpolação caracteriza-se em determinar uma função que aproximadamente se “acomode” aos pontos estabelecidos. O método de ajuste de curvas consiste em encontrar uma função que garanta uma boa “aproximação” a uma série de pontos tabelados.

Ao se ajustar dados, deve-se levar em conta a possibilidade de ocorrência de erros na obtenção ou alterações no comportamento das variáveis ao longo do processo de coleta, podendo provocar desvios na resposta que se deseja encontrar.

Cláudio e Marins (2000, p. 231) apresentam diversos motivos que levam a não usar a interpolação, sendo alguns deles:

- *Ser trabalhosa: em um conjunto com muitos elementos a solução de aproximação dos dados por interpolação pode tornar-se muito complexa.*
- *Incorrer em erros de medição: a coleta dos dados poderá conter inerentes, que em algumas vezes, não são previsíveis.*
- *Predizer o tipo de função a partir da expressão gráfica: o comportamento do problema pode induzir o tipo de função que estabelece a relação entre a variável independente (x) e a variável dependente (y).*

Dessa forma, recorreu-se ao método de ajuste de curvas para determinar uma função que melhor se ajusta ao conjunto de dados fornecidos.

Ainda, segundo os autores, para determinar uma função desta natureza é necessário definir o tipo de curva e calcular seus parâmetros, que a partir deles é possível encontrar  $f(x_i)$  e comparar com o valor  $y_i$  dado. Nesse processo, encontra-se um valor denominado de erro ou resíduo:

$$R_i = f(x_i) - y_i. \quad (1)$$

A fim de minimizar esse erro, é preciso determinar uma soma não nula (a diferença entre  $f(x_i) - y_i$  pode ser tanto positiva ou negativa, ocasionando uma soma de erros nula sem que o ajuste seja bom), diferenciável em todos os pontos  $x_i$  (possibilitando achar o mínimo de tal soma) e possível de ser resolvida com cálculos manuais.

Uma forma de evitar esses casos é minimizar o quadrado da diferença:

$$\sum_{i=1}^m R_i^2 \text{ é minimizado.} \quad (2)$$

Assim, nunca se tem uma soma nula e a função é facilmente diferenciável ( $f(x) = x^2$ ). Esse processo é denominado *Método dos Mínimos Quadrados*.

Dados os pontos  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ , segundo o critério dos mínimos quadrados, a função  $f$  que melhor se ajusta aos pontos é a função cujas constantes (coeficientes ou parâmetros)  $c_1, c_2, \dots, c_n$  são determinadas de modo que a soma dos quadrados dos resíduos seja mínima.

Dessa forma,

$$R = \sum_{i=1}^m R_i = \sum_{i=1}^m (f(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - f(x_i))^2. \quad (3)$$

Pode-se constatar que  $R$  é uma função de incógnitas  $c_j$  e, deste modo, “passará por um mínimo quando as  $n$  derivadas parciais se anularem, simultaneamente” (CLAUDIO e MARINS, 2000, p. 232). Para que isso aconteça, deve-se igualar as derivadas parciais a zero:

$$\frac{\partial R}{\partial c_j} = 2 \sum_{i=1}^m [f(x_i) - y_i] \frac{\partial f(x_i)}{\partial c_j} = 0. \quad (4)$$

A equação, acima, gera um sistema de  $n$  equações algébricas lineares chamadas Equações Normais que podem ser resolvidas através de um sistema.

Por meio da análise gráfica dos dados, pode-se observar o tipo de comportamento da função que se deseja ajustar, podendo-se optar por um ajuste a uma reta (ajuste linear), parábola (ajuste quadrático), exponencial, logarítmico, potência, etc. Nesse trabalho, estudar-se-á os ajustes linear e exponencial.

### 2.2.1 Ajuste linear

Conforme Burden e Faires (2008, p. 461), para ajustar um conjunto de dados  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$  a uma reta, segundo o critério dos mínimos quadrados, envolve minimizar o erro ou resíduo com relação aos parâmetros  $c_0$  e  $c_1$ ,

$$R(c_0, c_1) = \sum_{i=1}^m [y_i - (c_1 x_i + c_0)]^2. \quad (5)$$

Para que ocorra o mínimo, deve-se igualar as derivadas parciais a zero

$$0 = \frac{\partial}{\partial c_0} \sum_{i=1}^m [y_i - (c_1 x_i - c_0)]^2 = 2 \sum_{i=1}^m (y_i - c_1 x_i - c_0)(-1) \quad (6)$$

e

$$0 = \frac{\partial}{\partial c_1} \sum_{i=1}^m [y_i - (c_1 x_i + c_0)]^2 = 2 \sum_{i=1}^m (y_i - c_1 x_i - c_0)(-x_i). \quad (7)$$

Simplificando as equações (6) e (7) obtém-se as Equações Normais

$$c_0 \cdot m + c_1 \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i \quad (8)$$

e

$$c_0 \sum_{i=1}^m x_i + c_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 = \sum_{i=1}^m x_i y_i, \quad (9)$$

cujas soluções serão encontradas através da resolução do seguinte sistema

$$c_0 = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 \sum_{i=1}^m y_i - \sum_{i=1}^m x_i y_i \sum_{i=1}^m x_i}{m(\sum_{i=1}^m x_i^2) - (\sum_{i=1}^m x_i)^2}, \quad (10)$$

$$c_1 = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m y_i}{m(\sum_{i=1}^m x_i^2) - (\sum_{i=1}^m x_i)^2}.$$

### 2.2.2 Ajuste exponencial

Conforme Cláudio e Marins, “quando os parâmetros a serem determinados não aparecem linearmente, pode-se fazer uma mudança de variável e adaptar o caso a um ajuste linear” (2000, p. 246).

Dependendo dos dados apresentados, é possível supor que os mesmos estejam relacionados exponencialmente, exigindo uma aproximação a uma função do tipo

$$y = c_1 e^{bx} \text{ ou } y = c_1 x^b \quad (11)$$

Segundo os autores, se  $y = c_1 e^{bx}$ , pode-se fazer a seguinte linearização:

$$z = \ln y.$$

Assim, sendo  $\ln y = \ln c_1 + bx$  e  $k_1 = \ln c_1$ , obtém-se  $z = k_1 + bx$ , que é o caso linear para  $(x, z)$ .

Dessa forma, pode-se usar o sistema (10), modificando apropriadamente os dados, resultando o sistema de equações lineares:

$$k_1 = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^m \ln y_i - \sum_{i=1}^m x_i \cdot \sum_{i=1}^m x_i \cdot \ln y_i}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - (\sum_{i=1}^m x_i)^2}, \quad (12)$$

$$b = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i \cdot \ln y_i - \sum_{i=1}^m x_i \cdot \sum_{i=1}^m \ln y_i}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - (\sum_{i=1}^m x_i)^2}$$

Abraham De Moivre (1667 - 1754) nasceu na França, mas viveu grande parte da sua vida na Inglaterra. Dedicou-se ao estudo das leis do acaso e a Teoria das Probabilidades, processos gerais e notações que ele considerava como uma nova Álgebra.

Dessa forma,  $c_1 = e^{k_1}$  e a função de ajuste é  $y = c_1 e^{bx}$ .

Uma observação importante a se considerar é que, após encontrada a função de ajuste, será necessário comprovar a validade da escolha da função e dos cálculos efetuados na solução dos sistemas calculando a função obtida nos pontos tabelados.

### 2.3 A CURVA DE GAUSS

Apresenta-se, a seguir, texto quase na íntegra, sobre a curva de Gauss de autoria de Luiz Pasquali, extraído do site ([www.psi-ambiental.net/pdf/PasqCap03.pdf](http://www.psi-ambiental.net/pdf/PasqCap03.pdf)). Acesso em: 06 de dez. 2012.

*O estudo sobre a curva normal teve origem nos trabalhos dos matemáticos suíços Jacob e Nicolaus Bernoulli sobre a lei dos grandes números. Contudo, foi na obra "The Doctrine of chances", publicada em 1733, que o matemático francês Abraham de Moivre a definiu pela primeira vez. Após esse trabalho, outros matemáticos como Laplace e Carl Gauss também utilizaram a definição da curva normal para fundamentar seus estudos sobre a análise de erros de experimentos. Gauss assume, em 1809, uma distribuição normal para os erros a fim de justificar o método dos mínimos quadrados.*

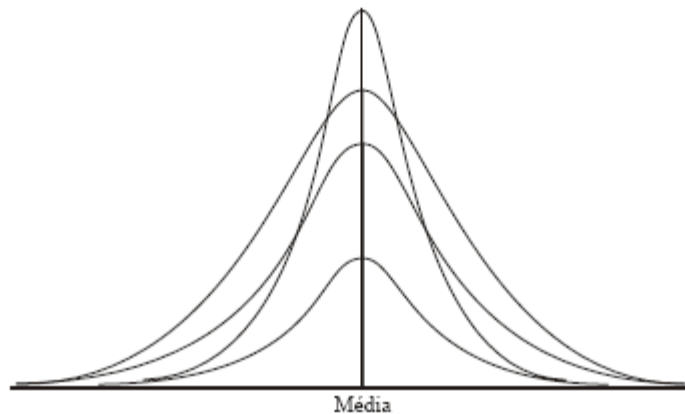
Por esse fato, a curva normal também é conhecida como distribuição de Gauss ou Gaussiana.

A curva normal é um ganho fundamental em ciência porque (1) a normalidade ocorre naturalmente em muitas, senão todas as medidas de situações físicas, biológicas e sociais e (2) é fundamental para a inferência estatística.

Em seu estudo, Moivre partiu da teoria que erros pequenos ocorrem em maior frequência do que erros grandes. Assim, os erros se distribuem formando uma curva simétrica com pico na média, caindo rapidamente para a esquerda e para a direita. A média corresponde ao ponto modal e as caudas aos erros que subestimam (à esquerda) ou superestimam (à direita) a média. A simetria da curva também permitiu a Moivre calcular o desvio padrão, isto é, as medidas de dispersão das observações em torno da média.

Sendo assim, a curva normal é definida pela simetria e é unimodal (tem apenas um pico). O desvio padrão é a medida de dispersão dos pontos em torno da média. Diferentes desvios-padrão provocam diferentes níveis de curtose.

**Figura 3– Diferentes curvas normais**



Fonte: Extraído de Pasquali. Disponível em: <[www.psi-ambiental.net/pdf/PasqCap03.pdf](http://www.psi-ambiental.net/pdf/PasqCap03.pdf)>. Acesso em 06 dez. 2012.

A fórmula a seguir explica o fato de que curvas normais podem ter diferentes médias e diferentes desvios-padrão, pois dependem diretamente dos escores originais  $x$  e seus parâmetros de distribuição.

(13)

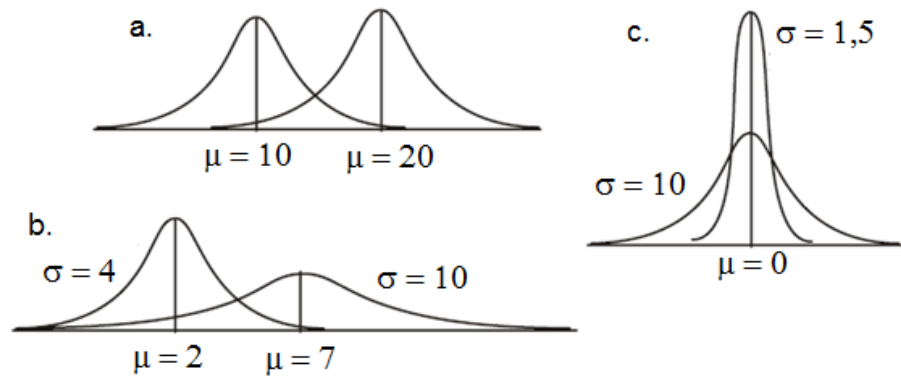
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) foi um matemático e físico alemão que se dedicou ao estudo de diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise numérica, geometria diferencial, astronomia e óptica. Foi um dos matemáticos mais influentes da história.

Na fórmula,  $\mu$  é a média,  $\sigma$  o desvio padrão e  $\sigma^2$  a variância. A média refere-se ao centro da distribuição e o desvio padrão ao espalhamento de curva.

Sendo assim, os valores numéricos de  $\mu$  e  $\sigma$  afetam a curva, como demonstrado na Figura 4.

**Figura 4– Variações na curva normal**



Fonte: Adaptado de Pasquali. Disponível em: <[www.psi-ambiental.net/pdf/PasqCap03.pdf](http://www.psi-ambiental.net/pdf/PasqCap03.pdf)>. Acesso em 06 dez. 2012.

É possível padronizar a equação (12) tomando  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$

(14)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$

Padronizar a curva normal tornando fixos os valores da média,  $\mu = 0$ , e da variância,  $\sigma = 1$ , possibilita usar parâmetros automaticamente definidos para qualquer escala que se deseje utilizar.



### 3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nessa seção apresenta-se o processo de modelagem matemática para os dados nos casos de infecção pelo vírus Influenza A (H1N1) 2009 no Estado do Rio Grande do Sul, entre os meses de janeiro e outubro de 2012, e a elaboração de um modelo matemático visando à compreensão do comportamento do vírus em sua fase pós-pandêmica no Estado.

Para realizar a modelagem, buscou-se embasamento teórico de pesquisadores do tema das diferentes áreas do conhecimento. Dentre os autores, pode-se citar Bassanezi (2002), Biembengut e Hein (2011) e Biembengut (2004). No desenvolvimento do modelo, seguiu-se os procedimentos citados por Biembengut e Hein (2011), a saber: interação, matematização e as sub etapas e, modelo matemático.

Na elaboração do modelo, consultou-se como referencial teórico matemático, os autores Claudio e Marins (2000) e Burden e Faires (2008), pois se configuram como referências bibliográficas do Curso de Graduação e obras internacionais, respectivamente.

O levantamento dos dados referentes aos casos de infecção pelo vírus Influenza A (H1N1) 2009 foi realizado através de busca nos sites de órgãos estaduais de saúde, como a Secretaria Estadual da Saúde do Estado do Rio Grande do Sul (<http://www.saude.rs.gov.br/>) e o Centro Estadual de Vigilância em Saúde ([http://www.saude.rs.gov.br/lista/180/Centro\\_Estadual\\_de\\_Vigil%C3%A2ncia\\_em\\_Sa%C3%BAde](http://www.saude.rs.gov.br/lista/180/Centro_Estadual_de_Vigil%C3%A2ncia_em_Sa%C3%BAde)).

A fim de obter um melhor entendimento sobre o vírus Influenza A (H1N1) 2009, realizou-se breve panorama, apresentado a seguir.

#### **3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA: INFECÇÃO PELO VÍRUS INFLUENZA A (H1N1) 2009**

O vírus Influenza é o agente causador da doença comumente conhecida como gripe, caracterizada por ser de fácil transmissão e distribuição global que afeta o sistema respiratório. Uma pessoa pode contraí-la diversas vezes durante a vida, com manifestação de maior ou menor gravidade (MATO GROSSO DO SUL, [2009?], p. 1).

Apresenta-se, a seguir, texto quase na íntegra, sobre a estrutura da partícula viral do vírus Influenza, de autoria de Danielle Pequito, incluindo-se a Figura 5, extraído do site ([www.cescage.edu.br/new/ah1n1/Influenza\\_A\\_H1N1.pdf](http://www.cescage.edu.br/new/ah1n1/Influenza_A_H1N1.pdf)), no dia 06 de dez. de 2012.

*Os vírus Influenza possuem genoma de RNA de fita simples fragmentado, fazem parte da família Orthomyxoviridae, sendo os três tipos classificados de acordo com sua diversidade antigênica em Influenza A, B e C.*

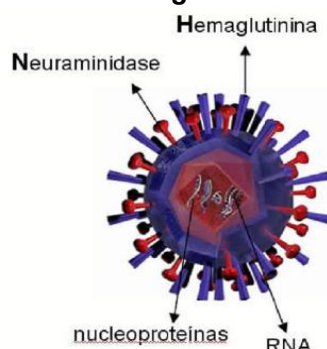
*No envelope viral estão presentes as proteínas (antígenos) hemaglutinina (HA), associada à infecção das células, e neuraminidase (NA), que facilita a saída das partículas virais do interior das células infectadas (Martins et al, 2011, p. 4).*

*Além dos antígenos HA e NA, estão presentes na partícula viral as nucleoproteínas, associadas ao RNA genômico do vírus, e a proteína da matriz M1, envolvidas na replicação e na estabilidade do vírus, respectivamente. O conjunto desses antígenos é o que define os tipos de Influenza.*

O vírus Influenza foi batizado pela primeira vez em 1580, na Itália, em uma epidemia que seria decorrente de influências planetárias, com sintomas de febre, tosse e calafrio (MURPHY e WEBSTER, 1996; TALAVERA, 1999; VALDEZ, 2002 apud SACRAMENTO, 2010, p. 4).

Os primeiros relatos de suspeitas de infecção pelo vírus Influenza ocorreram por volta do século V a.C. pelo grego Hipócrates, considerado o pai da Medicina. Hipócrates relatou casos de uma doença respiratória que em semanas dizimou dezenas de pessoas, desaparecendo tempos depois (HOSPITAL DE CLÍNICAS DA FACULDADE DE MEDICINA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, [2009?], p. 3). Relatos sobre a doença ocorreram também durante a Idade Média (Rodrigues et al, 2007, p. 210-216). Em 1552, em Texcoco no México, foi registrado o primeiro caso da doença no continente americano (KOLATA, 1999; VALDEZ, 2002, VIESCO, 1996 apud SACRAMENTO, 2010, p. 4).

**Figura 5– Estrutura genética do vírus Influenza**



Fonte: Extraído de Pequito ([www.cescage.edu.br/new/ah1n1/Influenza\\_A\\_H1N1.pdf](http://www.cescage.edu.br/new/ah1n1/Influenza_A_H1N1.pdf)). Acesso em 06 dez 2012.

Os vírus Influenza podem infectar diferentes espécies (humanos, aves, suínos, equinos, etc.). Dentre os quinze subtipos de hemaglutinina e os nove de neuraminidase descritos na literatura, sabe-se que H1, H2, H3, N1 e N2 são capazes de infectar seres humanos (JOFRÉ et al., 2005 apud RODRIGUES et al.,

2007, p. 210-216). Os vírus Influenza são caracterizados de acordo com a estrutura de seus antígenos internos (A, B, C) e de seus antígenos de superfície (HA e NA). O vírus Influenza A representa a etiologia mais comum da gripe no ser humano.

Conforme Rodrigues *et al.* (2007, p. 210-216), os três tipos de vírus Influenza, A, B e C, podem sofrer mutações (transformações em sua estrutura genômica), sendo o vírus Influenza A o que sofre alterações e rearranjos com maior frequência e que, devido a essa alta variabilidade e capacidade de adaptação, está associado aos casos de epidemias e pandemias. Os grandes casos de infecção acontecem quando novas variantes do vírus aparecem e a população ainda não apresenta imunidade contra o agente viral. Os vírus Influenza B e C, por sofrerem menos variações antigênicas, não estão associados a epidemias.

Uma epidemia é caracterizada pela elevação do número de casos de uma doença em um determinado lugar e período de tempo, caracterizando, de forma clara, um excesso em relação à frequência esperada. Já a pandemia caracteriza-se por uma epidemia de uma doença que afeta pessoas em países e continentes (BRASIL, 2010a).

O potencial pandêmico da Influenza mostra-se de extrema importância, exigindo atenção das agências de saúde do mundo inteiro. Ao longo da história, vários casos de epidemias e pandemias de Influenza foram registrados, sendo os mais conhecidos os ocorridos na Espanha entre os anos de 1918 e 1920 - Gripe Espanhola - e na China entre os anos de 1957 e 1960 – Gripe Asiática - e de 1968 a 1972 - Hong Kong.

De acordo com a Secretaria Estadual da Saúde do Estado do Rio Grande do Sul - SES/RS, as pandemias e surtos regionais acontecem em intervalos que variam de 10 a 40 anos e de um a três anos, respectivamente.

Os surtos caracterizam-se por casos de epidemia que se limitam a uma pequena área geográfica (BRASIL, 2010a).

Os modernos meios de transporte e o frequente trânsito de pessoas entre os continentes promovem a propagação do vírus Influenza no mundo, causando epidemias quase simultâneas.

Em abril de 2009, no México e Estados Unidos, foram registrados casos de contaminação pelo vírus Influenza (H1N1), identificados como uma nova variante genética. O novo vírus é decorrente de recombinações antigênicas de Influenza humano, suíno e aviário, possuindo fragmentos genômicos de Influenza A (H1N1) suíno (linhagens da América do Norte e da Eurásia) e aviário (linhagem Norteamericana), além de fragmentos genômicos do (H3N2) humano de circulação sazonal. O novo vírus foi batizado pela Organização Mundial de Saúde (OMS) como Influenza A (H1N1) 2009.

Poucos dias após a descrição dos primeiros casos no México e Estados Unidos, outros países como Inglaterra, África do Sul, Nova Zelândia, Austrália, Chile, Argentina e Brasil também registraram casos de contágio pelo novo vírus. Em dois meses, a OMS detectou que o vírus já estava circulando nos cinco continentes, alcançando o nível 6 de status de uma pandemia, classificando a disseminação global do vírus como um evento de saúde pública de preocupação internacional (HOSPITAL DE CLÍNICAS DA FACULDADE DE MEDICINA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, [2009?], p. 2).

Segundo a OMS, a evolução epidemiológica de uma infecção é definida em seis fases:

- **Fase 1:** ausência de doença no ser humano por vírus influenza que circula entre animais;
- **Fase 2:** doença no ser humano provocada por vírus influenza que circula em animais selvagens ou domésticos, o que torna este vírus capaz de provocar pandemia;
- **Fase 3:** doença esporádica ou em pequenos surtos, sem evidência de transmissão inter-humana suficiente para manter os surtos, mas com risco potencial de provocar pandemia;
- **Fase 4:** pequeno(s) foco(s) de transmissão inter-humana com localização limitada, mas com risco potencial de provocar pandemia;
- **Fase 5:** maior expansão inter-humana, restrita a dois ou mais países de uma região do planeta, com risco de provocar pandemia;
- **Fase 6:** transmissão inter-humana sustentada e atingindo mais de duas regiões planetárias.

Fonte: Ministério da Saúde. 2010. Plano Brasileiro de Preparação para Enfrentamento de uma Pandemia de Influenza. IV Versão.

### 3.1.1 Interação

Segundo o Centro Estadual de Vigilância em Saúde do Rio Grande do Sul – CEVSRS, em 2009 mais de 190 países registraram milhares de casos e óbitos relacionados ao vírus Influenza (H1N1) 2009. O monitoramento da circulação de vírus Influenza é controlado desde o ano 2000 pelo Sistema de Vigilância Epidemiológica, que acompanha os casos de surtos de Síndrome Gripal (SR) e de Síndrome Respiratória Aguda Grave (SRAG). Em 2009, 298 óbitos foram confirmados no Estado em consequência do vírus Influenza. Em 2010, já na fase pós-pandêmica, 716 casos de doenças foram notificados ao CEVSRS, mas nenhum óbito foi confirmado.

A Tabela 1 apresenta o histórico de registros da doença no Estado entre os anos de 2009 e 2012.

**Tabela 1 – Casos e óbitos notificados de SRAG e confirmados de Influenza A (H1N1) 2009, RS entre os anos de 2009 e 2012**

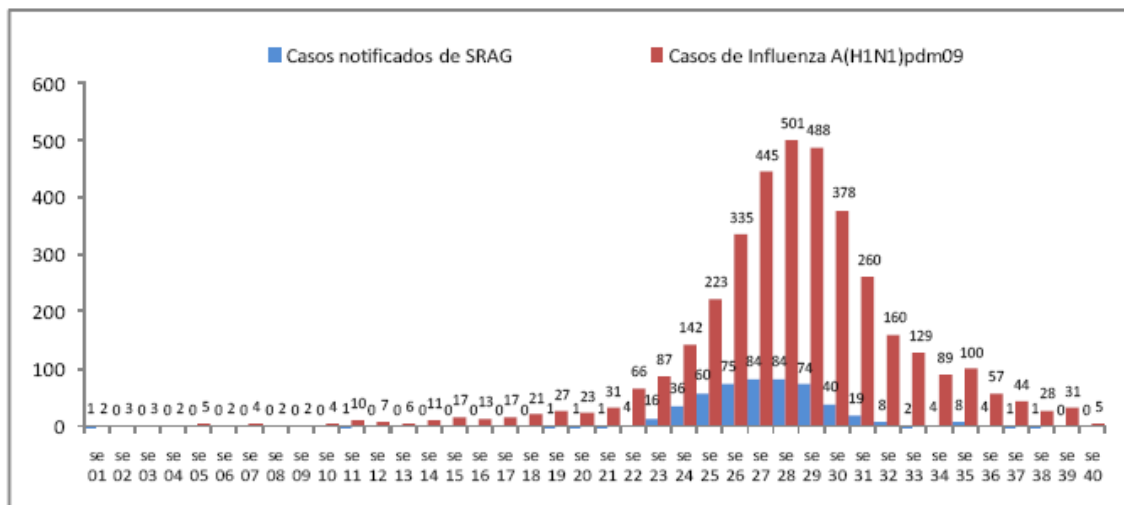
Ano	Casos notificados	Casos confirmados	Óbitos notificados	Óbitos confirmados
2009	8338	3585	494	298
2010	716	0	60	0
2011	1501	103	125	14
2012	3780	525	214	67

Fonte: Extraído de CENTRO ESTADUAL DE VIGILÂNCIA EM SAÚDE. Boletim Epidemiológico preliminar da Influenza A (H1N1) 2009 no RS até 24/09/12 (Semana epidemiológica 41) (2012).

Conforme se pode observar, no ano de 2011 foram notificados 1501 casos de SRAG, sendo que 103 foram confirmados como infecção pelo vírus Influenza A (H1N1) 2009, vitimando 14 pessoas. Em 2012 estão sendo registrados novos casos da doença que, embora com magnitude inferior ao ano de 2009, já ultrapassam os dados de 2011.

O CEVSRS acompanhou, em 2012, a distribuição dos casos notificados de SRAG e os confirmados de Influenza A (H1N1) 2009:

**Figura 6- Casos notificados de SRAG e confirmados de Influenza A (H1N1) 2009 segundo semana de início de sintomas, RS, até 10/10/12.**



Fonte: Extraído de CENTRO ESTADUAL DE VIGILÂNCIA EM SAÚDE. Boletim Epidemiológico preliminar da Influenza A (H1N1) 2009 no RS até 24/09/12 (Semana epidemiológica 41) (2012).

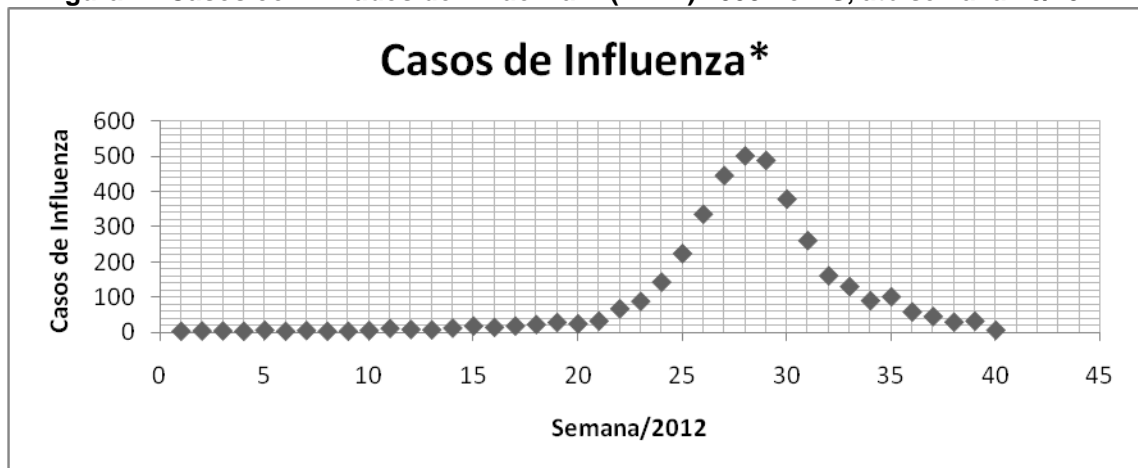
### 3.1.2 Matematização

De acordo com o Boletim Epidemiológico Preliminar da Influenza A (H1N1) 2009 (semana epidemiológica 41), emitido pelo Centro Estadual de Vigilância do Estado do Rio Grande do Sul, até o mês de outubro de 2012 já havia sido registrado 525 casos confirmados de infecção pelo vírus Influenza A (H1N1) 2009. A Tabela 2 apresenta os dados divulgados no boletim:

**Tabela 2– Casos confirmados de Influenza A (H1N1) 2009 no RS, até semana 40/2012**

Semana/2012	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Casos de Influenza	2	3	3	2	5	2	4	2	2	4	10	7	6	11	17	13	17	21	27	23

Semana/2012	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Casos de Influenza	31	66	87	142	223	335	445	501	488	378	260	160	129	89	100	57	44	28	31	5

**Figura 7– Casos confirmados de Influenza A (H1N1) 2009 no RS, até semana 40/2012**

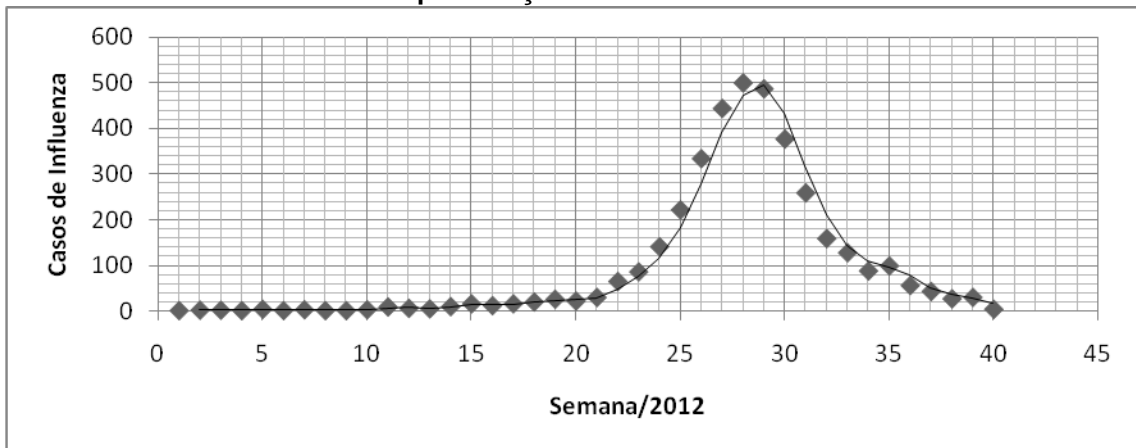
\* Dados preliminares até 10/10/12. Fonte: Adaptado de CENTRO ESTADUAL DE VIGILÂNCIA EM SAÚDE. Boletim Epidemiológico preliminar da Influenza A (H1N1) 2009 no RS até 24/09/12 (Semana epidemiológica 41) (2012).

Ao analisar os dados apresentados, formularam-se os seguintes questionamentos:

- *Por que nos meses de maio a setembro de 2012 houve maior número de ocorrência dos casos de infecção pelo vírus Influenza A (H1N1) 2009?*
- *É possível prever um padrão de sazonalidade esperado para esse tipo de vírus?*

Para responder essas questões, procurou-se por uma curva que melhor aproximava todos os pontos do gráfico acima, como tentativa de compreender o comportamento desses dados.

**Figura 8 – Casos confirmados de Influenza A (H1N1) 2009 no RS, até semana 40/2012 com aproximação de uma curva**



Fonte: Adaptado de CENTRO ESTADUAL DE VIGILÂNCIA EM SAÚDE. Boletim Epidemiológico preliminar da Influenza A (H1N1) 2009 no RS até 24/09/12 (Semana epidemiológica 41) (2012).

A fim de determinar uma curva que melhor se ajustasse ao conjunto de dados, buscou-se identificar os conceitos matemáticos que se utilizariam no processo de elaboração do modelo, realizando um estudo sobre as teorias referentes ao Método dos Mínimos Quadrados e à curva de Gauss.

A elaboração do modelo matemático para o ajuste dos dados dos casos de infecção pelo vírus Influenza A (H1N1) 2009 no ano de 2012 teve início com a identificação dos valores  $(x_i, y_i)$  envolvidos no problema.

**Tabela 3– Valores de  $(x_i, y_i)$**

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$y_i$	2	3	3	2	5	2	4	2	2	4	10	7	6	11	17	13	17	21	27	23
$x_i$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$y_i$	31	66	87	142	223	335	445	501	488	378	260	160	129	89	100	57	44	28	31	5

Ao analisar os valores de  $(x_i, y_i)$  pesquisados e levar em consideração o formato de curva gaussiana que eles apresentam quando representados graficamente, partiu-se da hipótese que a função que melhor aproxima tais pontos era dada por

$$y + y_0 = Ae^{-b(x-x_0)^2} \quad (15)$$

sendo  $x_0$  o centro da gaussiana,  $b$  o espalhamento,  $A$  a amplitude e  $y_0$  o deslocamento vertical.

Para aplicar o método dos mínimos quadrados, realizou-se a linearização da função, chegando às equações (16) e (17):

$$\ln( y + y_0 ) = \ln( A e^{-b(x-x_0)^2} ), \quad (16)$$

$$\ln( y + y_0 ) = \ln A - b(x-x_0)^2. \quad (17)$$

Conforme o método dos mínimos quadrados, tem-se como erro a soma dos quadrados das diferenças entre os valores de  $y_0$  na reta de aproximação e os valores dados de  $y_i$ :

$$E_2 = \sum_{i=1}^n [ \ln( y_i + y_0 ) - \ln A + b(x_i - x_0)^2 ]^2 \quad (18)$$

A fim de simplificar a nomenclatura assume-se  $Y_i = \ln( y_i + y_0 )$ ,  $a = -\ln A$  e  $X_i = (x_i - x_0)$ . Assim, obtém-se a equação

$$E_2 = \sum_{i=1}^n [ Y_i + a + bX_i ]^2. \quad (19)$$

Para encontrar o erro mínimo com relação aos parâmetros  $a$  e  $b$  foi preciso determinar as suas derivadas parciais e igualá-las a zero:

$$\frac{\partial E_2}{\partial a} = 0 \quad \therefore \quad 2 \sum_{i=1}^n [ Y_i + a + bX_i ] \cdot 1 = 0 \quad (20)$$

e

$$\frac{\partial E_2}{\partial b} = 0 \quad \therefore \quad 2 \sum_{i=1}^n [ Y_i + a + bX_i ] \cdot x_i = 0. \quad (21)$$

Ao simplificar as equações, obtém-se as Equações Normais

$$\sum_{i=1}^n Y_i + \sum_{i=1}^n a + \sum_{i=1}^n bX_i = 0 \quad (22)$$

e

$$\sum_{i=1}^n Y_i X_i + \sum_{i=1}^n a X_i + \sum_{i=1}^n b X_i^2 = 0, \quad (23)$$

cujas soluções podem ser encontradas resolvendo o seguinte sistema:

$$n \cdot a + b \sum_{i=1}^n X_i = - \sum_{i=1}^n Y_i, \quad (24)$$



$$a \sum_{i=1}^n X_i + b \sum_{i=1}^n X_i^2 = - \sum_{i=1}^n X_i Y_i \quad (25)$$

Como solução do sistema, encontra-se as expressões apresentadas a seguir:

$$a = \frac{- \sum_{i=1}^n X_i^2 \sum_{i=1}^n Y_i + \sum_{i=1}^n X_i Y_i \sum_{i=1}^n X_i}{n(\sum_{i=1}^n X_i^2) - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \quad (26)$$

e

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i}{n(\sum_{i=1}^n X_i^2) - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \quad (27)$$

Para determinar os valores dos parâmetros  $a$  e  $b$ , elaborou-se uma planilha no programa *Excel* para facilitar o cálculo das expressões (26) e (27) acima.

Na planilha foram inseridos os valores de  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $(X_i \cdot Y_i)$ ,  $X_i^2$ ,  $Ae^{-b(x-x_0)^2}$  e  $E_2$ , nesta ordem, conforme exemplificado na Figura 9:

**Figura 9– Planilha utilizada na resolução do sistema**

$x_i$	$y_i$	$(x_i - x_0)^2 = X_i$	$\ln(y_i + y_0) = Y_i$	$Y_i \cdot X_i$	$X_i^2$	$Ae^{-b(x-x_0)^2}$	$E_2$
<b><math>\Sigma</math></b>		0	0	0	0,00		0,00

Durante a resolução do sistema no programa *Excel*, para determinar os valores dos parâmetros, foi necessário usar estratégias de cálculo, pois se manipulava valores muito grandes, acarretando erros nas operações intermediárias.

### 3.1.3 Modelo matemático

Resolvido o sistema e determinadas as equações para encontrar os valores dos parâmetros, atribuiu-se valores para as variáveis envolvidas.

Ao observar os dados coletados, percebeu-se a não existência de um valor  $y_i = 0$  e, portanto, inicialmente não faria sentido atribuir valores para  $y_0$ . Assumiu-se então, o valor  $y_0 = 0$  na solução do sistema.

Como ponto inicial de análise, escolheu-se o valor de  $x_0 = 28$ , por se tratar da semana em que o número de casos de infecção pelo vírus Influenza A (H1N1) 2009 atingiu o seu valor máximo.

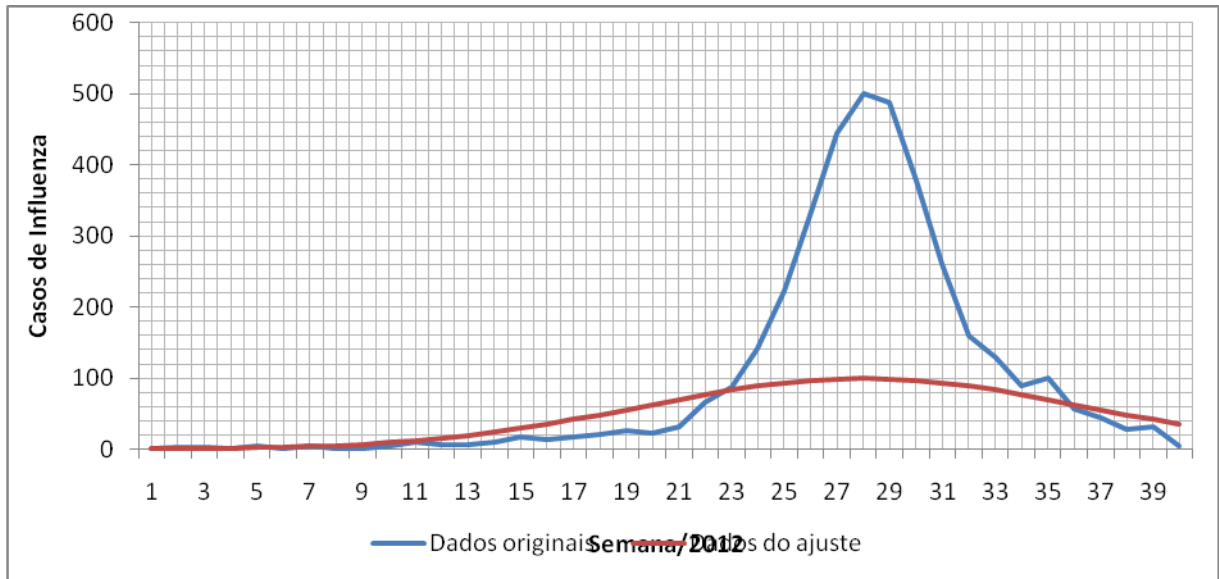
O valor de  $n = 40$  corresponde ao número de semanas de 2012 em que os dados foram coletados.

Simulação 1:

$x_0$	$y_0$	$n$
28	0	40

$x_i$	$y_i$	$(x_i - x_0)^2 = X_i$	$\ln(y_i + y_0) = Y_i$	$Y_i \cdot X_i$	$X_i^2$	$Ae^{-b(x_i - x_0)^2}$	$E_2$
1	2	729	0,6931472	505,304	531441,00	0,53489353	1,739325079
2	3	676	1,0986123	742,662	456976,00	0,78215169	1,80719323
3	3	625	1,0986123	686,633	390625,00	1,12742412	0,957808275
37	44	81	3,7841896	306,519	6561,00	55,7076575	0,055662012
38	28	100	3,3322045	333,22	10000,00	48,6133419	0,304365727
39	31	121	3,4339872	415,512	14641,00	41,8185289	0,089611807
40	5	144	1,6094379	231,759	20736,00	35,4613053	3,83769745
$\Sigma$		7580	129,68928	11912,3	3202772,00		34,69101251

$a$	$b$	$A$	$E_2$
-4,60	0,0071694524329470	99,5682422958740	34,69101



Observa-se que, apesar de o erro ( $E_2$ ) ser relativamente pequeno para o conjunto de pontos ajustados, a curva obtida não se aproximou dos dados originais. Além disso, o parâmetro  $A$ , que confere à curva amplitude no eixo  $y$ , mostrou-se distante do valor original ( $y_i = 501$ ).

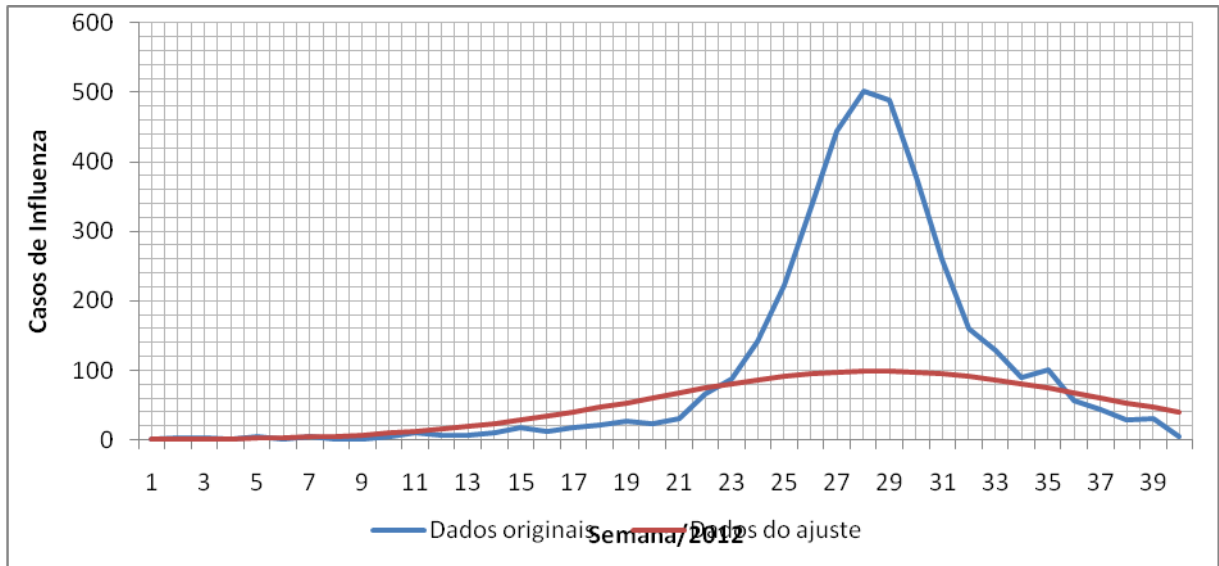
Realizaram-se variações para os valores de  $x_0$  a fim de tentar diminuir o erro e aproximar a curva de ajuste aos dados originais.

Simulação 2:

$x_0$	$y_0$	$n$
28,5	0	40

$x_i$	$y_i$	$(x_i - x_0)^2 = X_i$	$\ln(y_i + y_0) = Y_i$	$Y_i X_i$	$X_i^2$	$Ae^{-b(x-x_0)^a}$	$E_2$
1	2	756,25	0,6931472	524,193	571914,06	0,55032012	1,665138153
2	3	702,25	1,0986123	771,5	493155,06	0,79743372	1,75554245
3	3	650,25	1,0986123	714,373	422825,06	1,13974555	0,936650877
37	44	72,25	3,7841896	273,408	5220,06	60,38819	0,100238044
38	28	90,25	3,3322045	300,731	8145,06	53,3652986	0,415968481
39	31	110,25	3,4339872	378,597	12155,06	46,5157447	0,164676599
40	5	132,25	1,6094379	212,848	17490,06	39,9921835	4,323264382
$\Sigma$		7890	129,68928	12314,1	3487834,50		34,35872778

$a$	$b$	$A$	$E_2$
-4,60	0,0068684922483274	99,1904878648799	34,35873



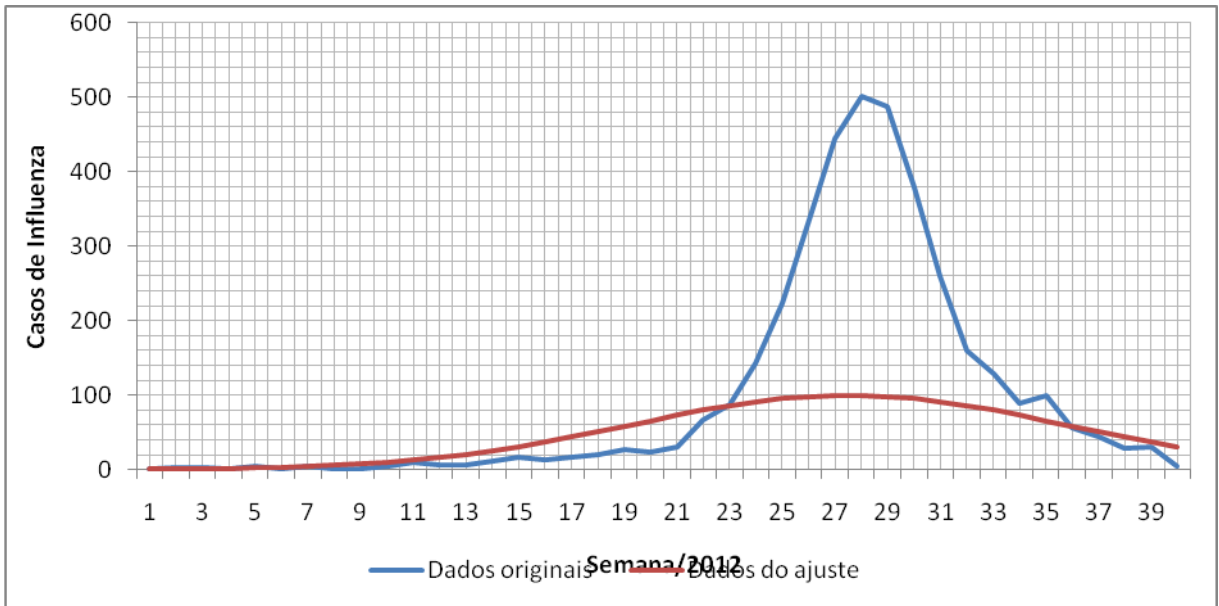
Ao atribuir o valor  $x_0 = 28,5$  reduziu-se o erro a partir da primeira casa decimal, porém a curva de ajuste permanece afastada dos dados originais. O parâmetro  $A$  também diminuiu.

Simulação 3:

$x_0$	$y_0$	$n$
27,5	0	40

$x_i$	$y_i$	$(x_i - x_0)^2 = X_i$	$\ln(y_i + y_0) = Y_i$	$Y_i X_i$	$X_i^2$	$Ae^{-b(x-x_0)^2}$	$E_2$
1	2	702,25	0,6931472	486,763	493155,06	0,522684558	1,800760873
2	3	650,25	1,0986123	714,373	422825,06	0,771301277	1,844947674
3	3	600,25	1,0986123	659,442	360300,06	1,121266978	0,968557152
37	44	90,25	3,7841896	341,523	8145,06	50,93963674	0,021448102
38	28	110,25	3,3322045	367,376	12155,06	43,85931566	0,201405849
39	31	132,25	3,4339872	454,145	17490,06	37,20218595	0,03326258
40	5	156,25	1,6094379	251,475	24414,06	31,08677487	3,339188181
$\Sigma$		7290	129,68928	11575,3	2940394,50		35,23810899

$a$	$b$	$A$	$E_2$
-4,61	0,0074827099264663	100,0786032123640	35,23811



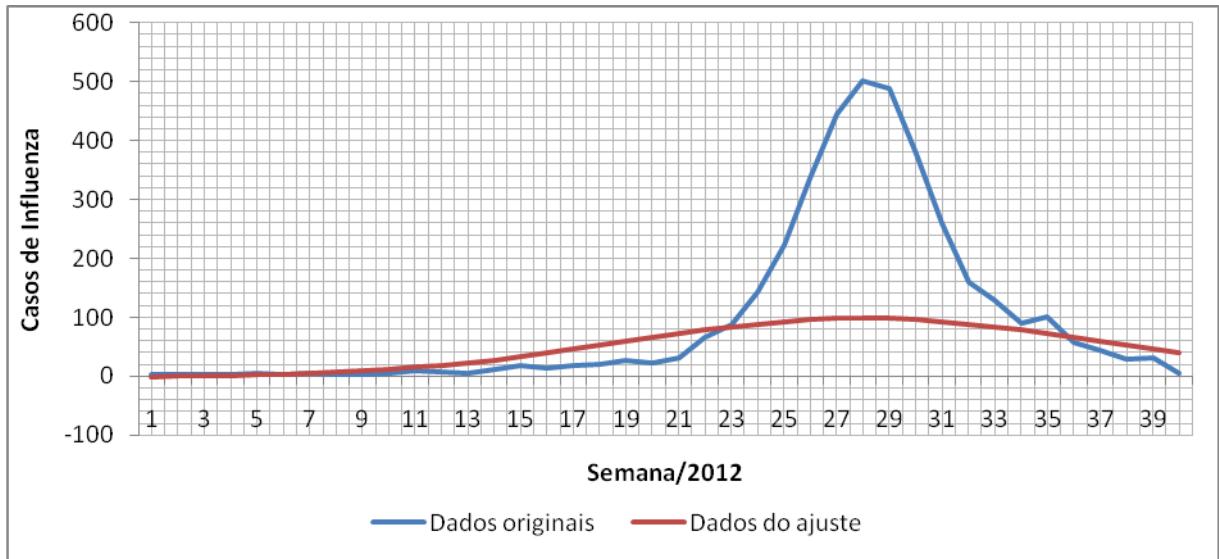
Ao reduzir para o valor  $x_0 = 27,5$ , aumentou-se o erro, assim como também o valor de  $A$ . Contudo, a curva de ajuste permaneceu afastada dos pontos originais.

Ao perceber que a curva dos pontos originais não tangencia o eixo  $x_0$  e levar em consideração o insucesso nas tentativas de aproximação dos pontos da curva, experimentou-se variar  $y_0$ , na tentativa de tornar os valores mais próximos de zero. Dessa forma, novas simulações foram realizadas atribuindo valores a esse parâmetro.

Simulação 4:

$x_0$	$y_0$	$n$
28	1,9	40

$x_i$	$y_i$	$(x_i - x_0)^2 = X_i$	$\ln(y_i + y_0) = Y_i$	$Y_i \cdot X_i$	$X_i^2$	$Ae - b(x - x_0)^2$	$E^2$
1	2	729	1,3609766	992,152	531441,00	-0,8075399	1,619369366
2	3	676	1,5892352	1074,32	456976,00	-0,3827112	1,374311101
3	3	625	1,5892352	993,272	390625,00	0,18136105	0,733101
37	44	81	3,8264651	309,944	6561,00	58,725959	0,077427543
38	28	100	3,3978585	339,786	10000,00	51,9908954	0,347042424
39	31	121	3,4934727	422,71	14641,00	45,4138927	0,13200964
40	5	144	1,9315214	278,139	20736,00	39,1278222	3,17812274
$\Sigma$		7580	137,28969	15068,5	3E+06		31,73251771



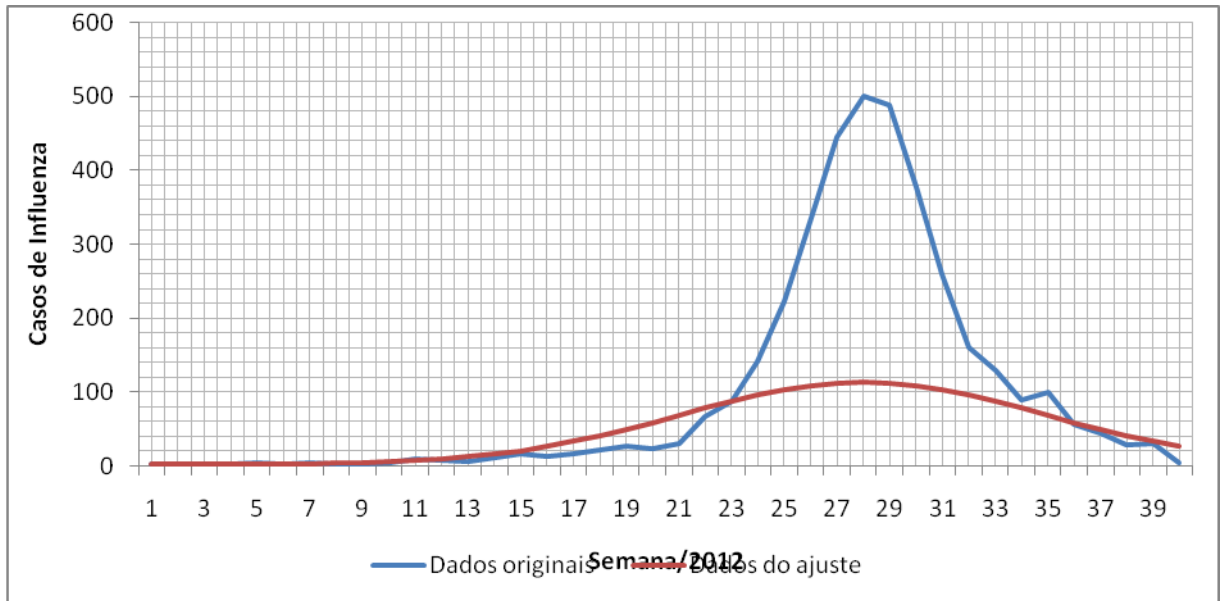
$a$	$b$	$A$	$E_2$
-4,61	0,0061979800319162	100,1590628604030	31,7325177

Assumir  $y_0 = 1,9$  não configurou mudança significativa ao resultado, visto que o valor do parâmetro  $A$  apresentou pequena variação. Entretanto, constatou-se a diminuição do erro ( $E_2 = 31,7325$ ).

Simulação 5:

$x_0$	$y_0$	$n$
28	-1,9	40

$x_i$	$y_i$	$(x_i - x_0)^2 = X_i$	$\ln(y_i + y_0) = Y_i$	$Y_i \cdot X_i$	$X_i^2$	$Ae^{-b(x-x_0)^2}$	$E_2$
1	2	729	-2,302585	-1678,6	531441,00	1,94903335	0,507897907
2	3	676	0,0953102	64,4297	456976,00	1,9860232	6,494589173
3	3	625	0,0953102	59,5689	390625,00	2,04774999	4,030232413
37	44	81	3,7400477	302,944	6561,00	49,2427838	0,013774934
38	28	100	3,2619353	326,194	10000,00	40,6023748	0,155208931
39	31	121	3,3707382	407,859	14641,00	32,8748497	0,003898429
40	5	144	1,1314021	162,922	20736,00	26,1699327	4,234689562
$\Sigma$		7580	108,26666	1782,55	3202772		59,16655441



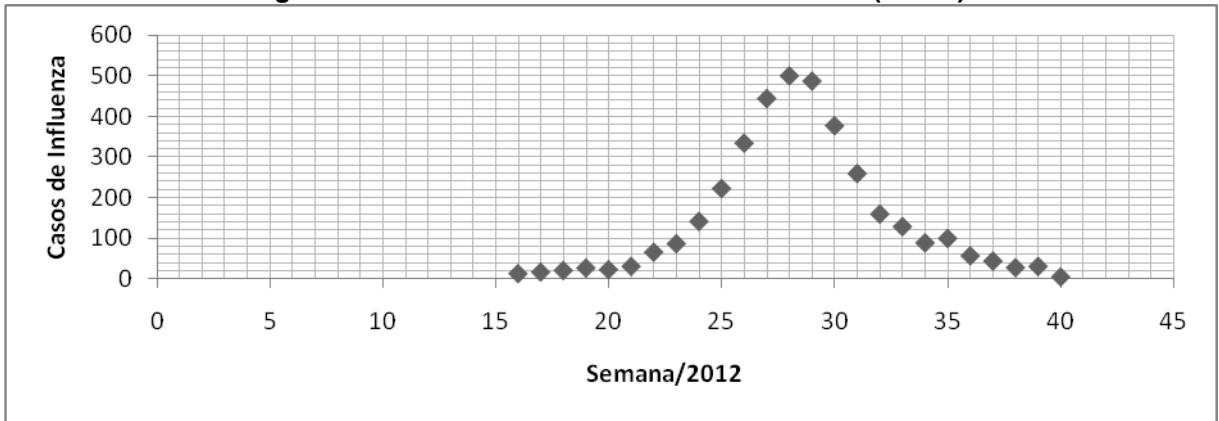
$a$	$b$	$A$	$E_2$
-4,72	0,0106059707763401	111,7761308401760	59,1665544

A variação do parâmetro  $y_0$  assumindo o valor  $(-1,9)$  acarretou no aumento do erro ( $E_2 = 59,1665$ ) e também no valor de  $A$  ( $A = 111,77$ ), porém insuficientes para o ajuste dos pontos.

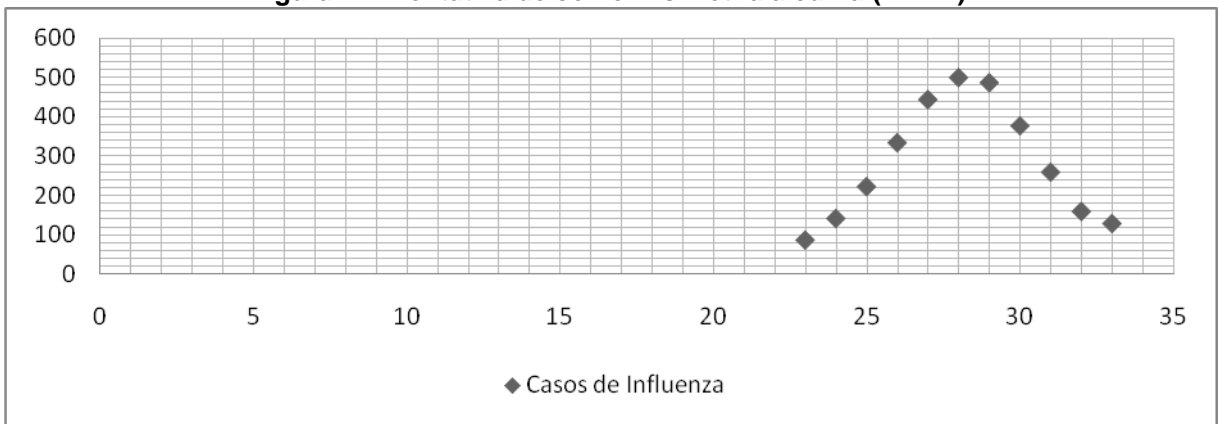
Após sucessivas simulações variando os valores de  $x_0$  e  $y_0$ , percebeu-se que seriam necessárias outras alterações nos parâmetros da curva de ajuste, a fim de aproximá-la do conjunto de dados estudado. Para isso, retomou-se a hipótese inicial – que a curva de Gauss era a que melhor se ajustava aos pontos  $(x_i, y_i)$  - e recorreu-se à característica principal da gaussiana: a simetria.

Nessa perspectiva, reduziu-se o intervalo de pontos  $x_0$ , de modo a deixá-los uniformemente distribuídos, tornando a curva o mais simétrica possível.

**Figura 10– Tentativa de conferir simetria à curva (n = 23)**

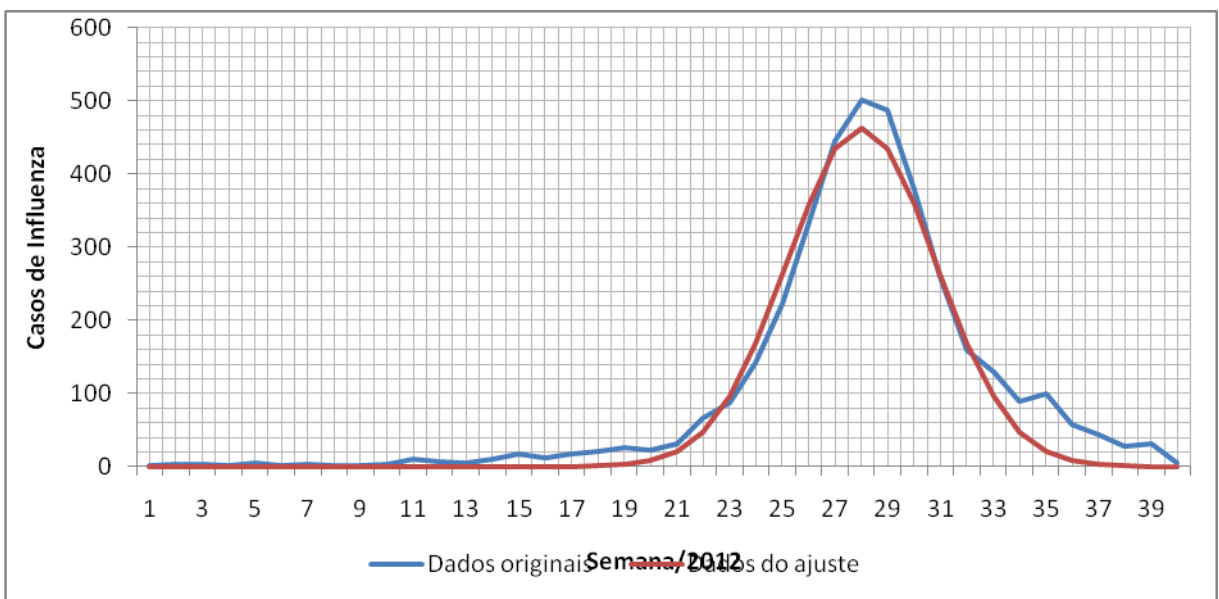


**Figura 11– Tentativa de conferir simetria à curva (n = 11)**



Simulação 6:

$x_0$	$y_0$	$n$
28	0	11



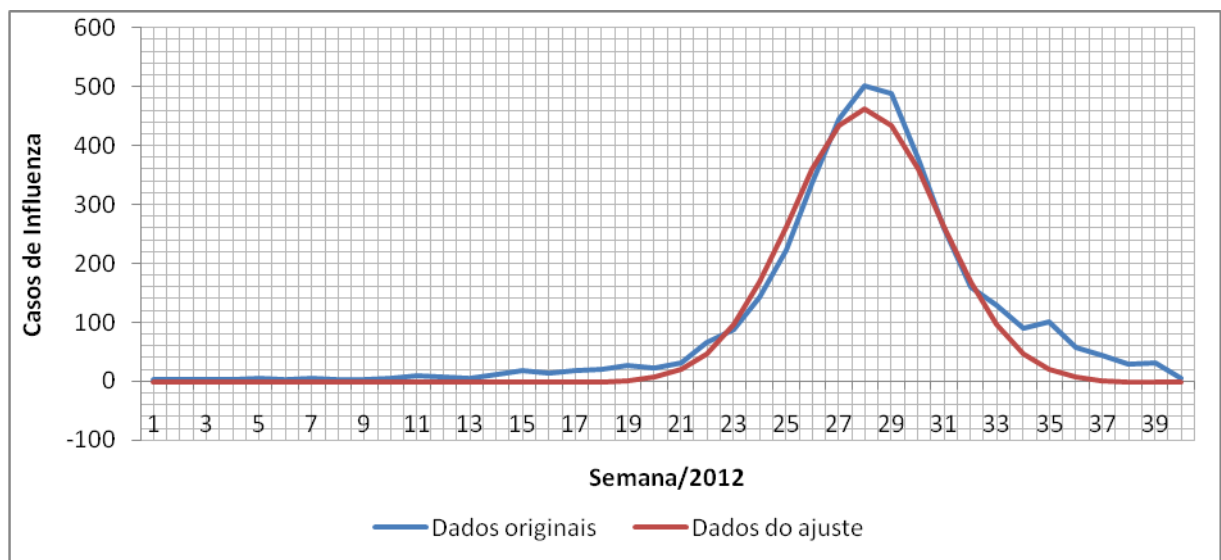


$a$	$b$	$A$	$E_2$
-6,14	0,0631139357667975	463,2581167334610	0,18535839

Mesmo permanecendo nulo o valor de  $y_0$ , percebe-se que a tentativa de atribuir a curva uma simetria, resultou em uma mudança significativa no resultado do ajuste. O valor do parâmetro  $A$  aproximou-se de forma expressiva do original e o erro ( $E_2 = 0,1853$ ) reduziu consideravelmente.

Simulação 7:

$x_0$	$y_0$	$n$
28	1,9	11

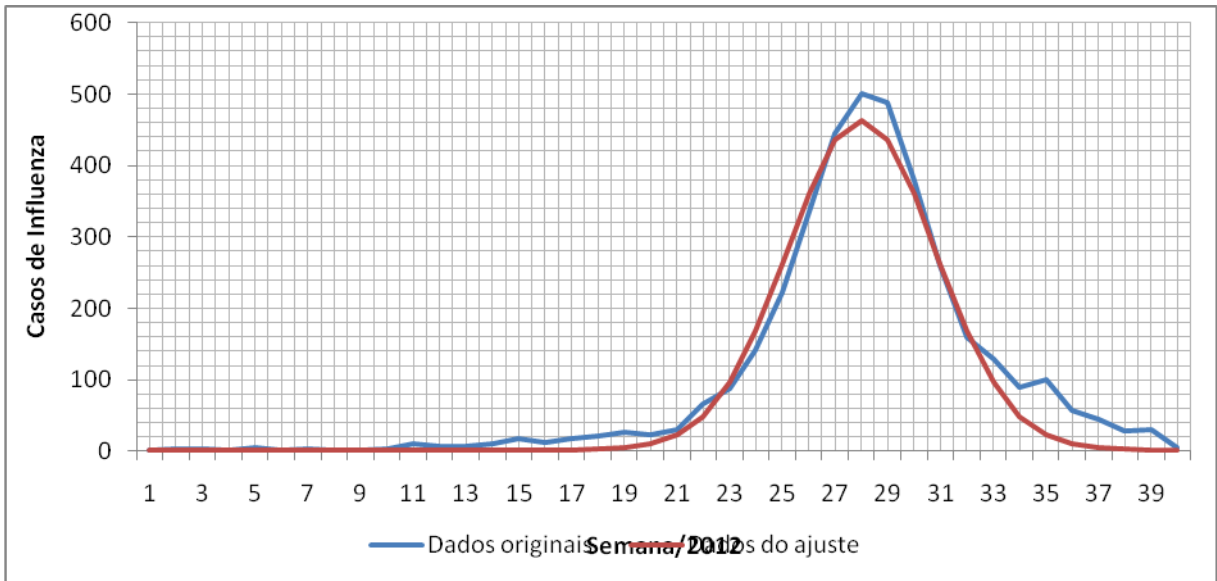


$a$	$b$	$A$	$E_2$
-6,14	0,0625276812682434	464,7429293366900	0,18266642

A mudança do parâmetro para  $y_0 = 1,9$  não apresentou resultados consideráveis quando se compara com a simulação anterior, visto que os valores de  $A$  e  $E_2$  sofreram pouca alteração.

Simulação 8:

$x_0$	$y_0$	$n$
28	-1,9	11



$a$	$b$	$A$	$E_2$
-6,14	0,0637134953516776	461,7872107474100	0,18816572

Ao alterar o valor de  $y_0 = -1,9$  percebeu-se a redução do erro ( $E_2 = 0,1881$ ), bem como no valor do parâmetro  $A$  (461,7872).

Essas tentativas, embora tenham melhorado de forma significativa os resultados, não foram eficientes em aproximar os valores da curva em seu ponto máximo. Assim, observando que, nas equações (18) e (19),  $X_i = (x_i - x_0)^2$  pode ser trocado por  $X_i = |x_i - x_0|^2$  - para qualquer  $p \in \mathbb{R}$  - sem alterações nas equações posteriores, decidiu-se tentar o ajuste para a curva

$$y + y_0 = Ae^{-b|x-x_0|^p} \quad (28)$$

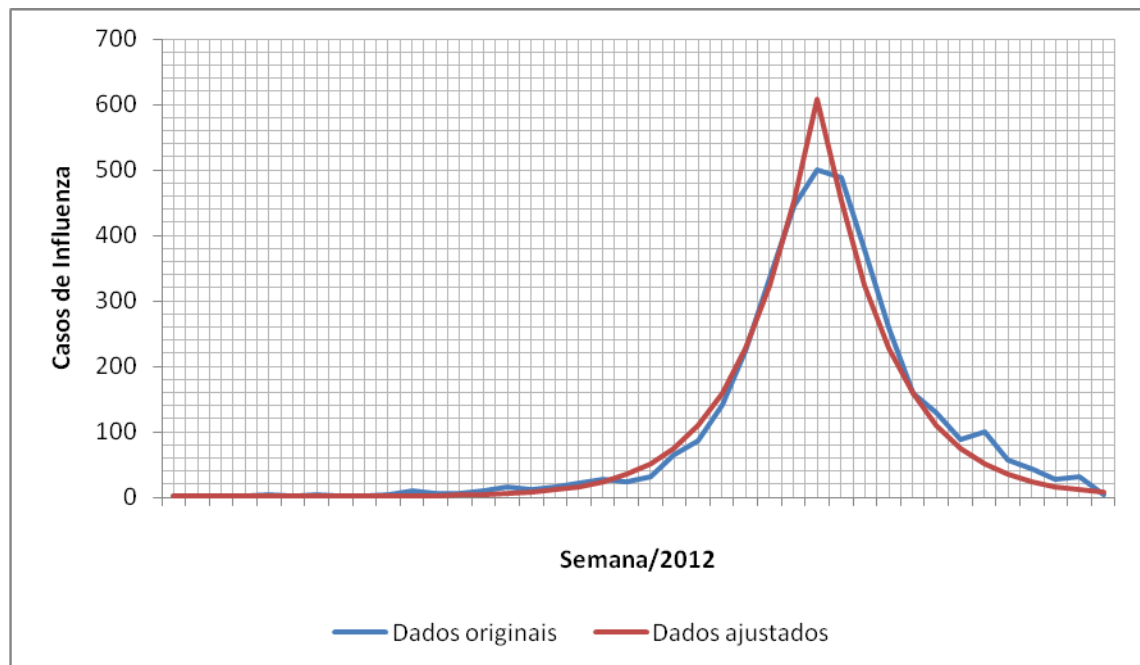
a fim de atribuir outros níveis de curtose à curva.

Simulação 9:

$x_0$	$y_0$	$n$	$p$
28	-1,9	11	1,10

$x_i$	$y_i$	$(x_i - x_0)^2 = X_i$	$\ln(y_i + y_0) = Y_i$	$Y_i X_i$	$X_i^2$	$Ae^{-b(x-x_0)^2}$	$E_2$
1	2	37,540508	-11,51293	-432,2	1409,29	2,00949692	47,02106261
2	3	36,013944	1E-05	0,00036	1297,00	2,0148972	17,68977265
3	3	34,493242	1E-05	0,00034	1189,78	2,02332468	14,12124548
37	44	11,211578	3,7376699	41,9052	125,70	24,25259	0,403493015
38	28	12,589254	3,2580969	41,017	158,49	16,8278392	0,315383115
39	31	13,980798	3,3672962	47,0775	195,46	11,8401205	1,16818745
40	5	15,385066	1,0986156	16,9023	236,70	8,50570663	0,59917763
$\Sigma$		33,919609	60,472315	174,618	144,82		0,181823122

$a$	$b$	$A$	$E_2$
-6,41	0,2946642342515770	605,5335902667280	0,181823121840



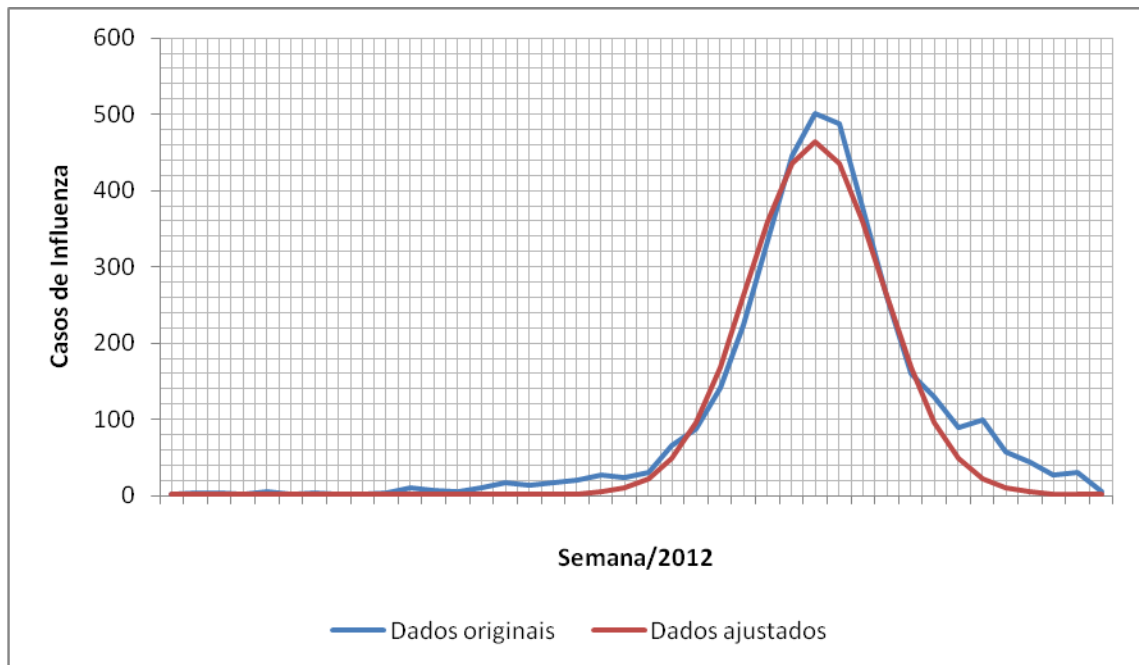
Após as alterações realizadas nota-se que o erro foi relativamente minimizado ( $E_2 = 0,1818$ ) e a curva de ajuste tende a estar muito próxima dos pontos originais. Contudo, o valor de  $A$  ultrapassa o valor de  $y_i = 501$ .

Simulação 10:

$x_0$	$y_0$	$n$	$p$
28	-1,9	11	2,00

$x_i$	$y_i$	$(x_i - x_0)^2 = X_i$	$\ln(y_i + y_0) = Y_i$	$Y_i X_i$	$X_i^2$	$Ae - b(x - x_0)^2$	$E^2$
1	2	729	-2,302585	-1678,6	531441,00	1,9	1444,718199
2	3	676	0,0953102	64,4297	456976,00	1,9	1371,260066
3	3	625	0,0953102	59,5689	390625,00	1,9	1141,165458
37	44	81	3,7400477	302,944	6561,00	4,54934139	7,649299283
38	28	100	3,2619353	326,194	10000,00	2,68958694	12,23726784
39	31	121	3,3707382	407,859	14641,00	2,10716727	24,45269774
40	5	144	1,1314021	162,922	20736,00	1,94785215	17,39758503
$\Sigma$		110	60,477662	550,11	1958		0,188165721

$a$	$b$	$A$	$E_2$
-6,14	0,0637134953516776	461,7872107474100	0,188165721342



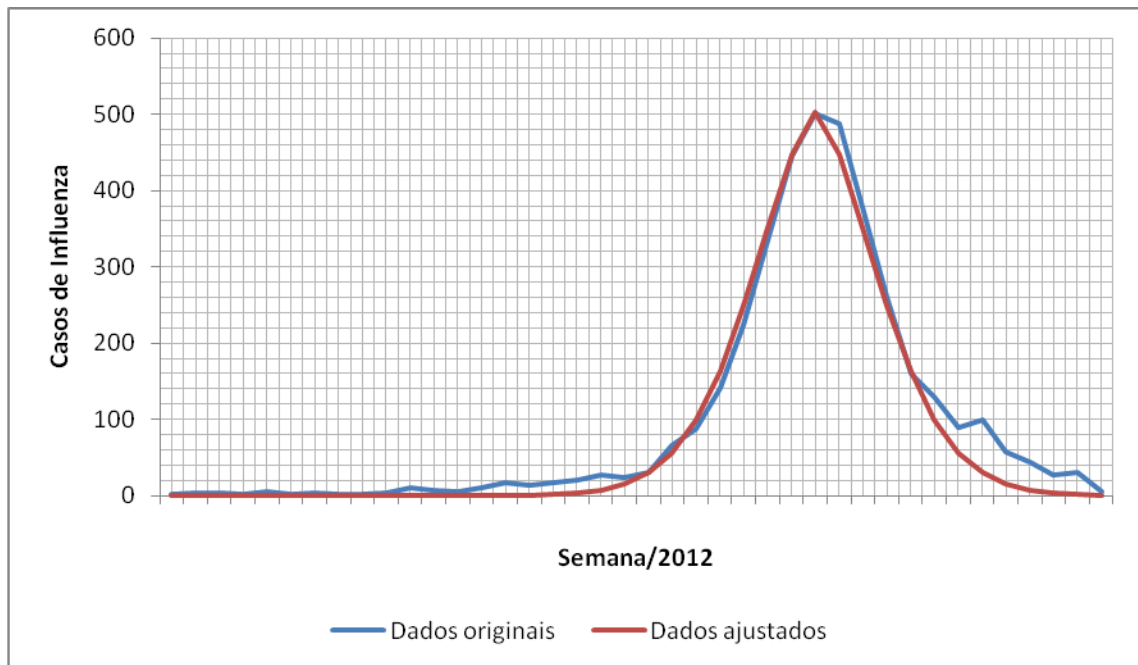
Ao mudar o valor da potência, obtém-se uma curva muito próxima da original, porém aumentou-se o erro a partir da terceira casa decimal.

Simulação 11:

$x_0$	$y_0$	$n$	$p$
28	0,0	11	1,65

$x_i$	$y_i$	$(x_i - x_0)^2 = X_i$	$\ln(y_i + y_0) = Y_i$	$Y_i X_i$	$X_i^2$	$Ae^{-b(x-x_0)^2}$	$E_2$
1	2	230,01185	0,6931472	159,432	52905,45	2,0732E-09	427,9659839
2	3	216,12551	1,0986123	237,438	46710,23	1,0091E-08	380,6503307
3	3	202,58207	1,0986123	222,559	41039,50	4,7232E-08	322,8059041
37	44	37,540508	3,7841896	142,06	1409,29	6,96286193	3,398857445
38	28	44,668359	3,3322045	148,844	1995,26	3,09031466	4,857314467
39	31	52,275468	3,4339872	179,513	2732,72	1,29866553	10,06570789
40	5	60,346079	1,6094379	97,1233	3641,65	0,51766812	5,143183774
$\Sigma$		68,695311	60,578595	347,892	695,96		0,135990969

$a$	$b$	$A$	$E_2$
-6,22	0,1139638861528910	502,1268220613090	0,135990968815



Ao alterar os valores dos parâmetros  $y_0$  e  $p$ , resulta uma curva muito próxima do ideal, minimizando-se o erro e aproximando-se o valor de  $A$  do original.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No desenvolvimento do processo de elaboração e de resolução do modelo, observou-se, inicialmente, que os parâmetros  $a$  e  $b$  não estavam resultando em valores satisfatórios. Após avaliação do modelo e do desenvolvimento computacional, concluiu-se que os erros apresentados eram decorrentes de operações em divisões por números muito grandes. Para sanar esta dificuldade, adotou-se a ideia de reescrever as equações para  $a$  e  $b$  de maneira a minimizar esse erro.

Como forma de validar o modelo, testou-se o desenvolvimento computacional em dados da forma  $y_i = 2e^{-0,9(x-28)^2}$ , encontrando a solução  $y_i = 1,99e^{-0,99(x-28)^2}$  com um erro  $E_2 = 2,6457$ . Isto comprova a validade do método adotado.

As diversas simulações realizadas a partir da resolução do sistema levam a crer que o conjunto de dados originais não caracterizava uma curva gaussiana. Isto pode ser justificado pelo fato de que a curva original não apresentava a simetria exigida para ser definida como curva de Gauss. Na tentativa de conferir simetria à curva, obteve-se um erro relativamente baixo e um ajuste muito próximo dos pontos originais.

Quando se utiliza modelagem matemática, deve-se considerar que as hipóteses iniciais podem não se confirmar. Nestes termos, é preciso alterar essas hipóteses e retomar o problema em análise. No estudo em questão, a curva gaussiana  $y + y_0 = Ae^{-b(x-x_0)^2}$ , mostrou-se inadequada à situação-problema, sendo necessário decidir-se por um novo modelo, no caso,  $y + y_0 = Ae^{-b|x-x_0|^p}$ , cuja decisão de incluir o parâmetro  $p$  à curva de ajuste foi tomada em caráter experimental, com a intenção de verificar como a curva de ajuste se comportava com o acréscimo de um novo parâmetro.

Essa inclusão, porém, acarretou em um melhor modelo analógico,  $y = 502,1268e^{-0,11396|x-28|^{1,65}}$ , o qual resultou em valor de  $p$  próximo de 1,65, com erro  $E_2 = 0,18$ .

Ao comparar as simulações anteriores e posteriores às alterações dos parâmetros, pode-se identificar que o valor de  $y_0$ , pouco influenciou no resultado do melhor ajuste. Entretanto, o valor do parâmetro  $p$ , afetou, diretamente, a altura do pico da curva (curtose).

Dessa forma, pode-se predizer que a suposta simetria conferida à curva e a inclusão do parâmetro  $p$ , contribuíram para o resultado do melhor ajuste ao conjunto de pontos estudados.

Para responder aos questionamentos que se propôs neste estudo, é necessário, além de saber qual modelo matemático pode valer para efetuar um modelo analógico, um conhecimento das características do vírus da Gripe, neste caso, o vírus Influenza A (H1N1) 2009.

Segundo Almeida *et al* [2008?], as ocorrências de infecção pelo vírus Influenza no Brasil, são mais frequentes nas regiões Sul e Sudeste, principalmente nos meses de abril a setembro, nas estações outono-inverno. O contrário acontece em países do hemisfério Norte, em que a incidência de casos de infecção pelo vírus Influenza ocorre predominantemente nos meses de outubro a abril, com pico nos meses de dezembro e março. Conforme os autores, ainda não há uma explicação razoável sobre a sazonalidade do vírus Influenza.

Nesse estudo, pelos dados levantados, verifica-se que a maior incidência de infecção por esse agente viral, ocorreu entre os meses de maio e setembro, com ápice no mês de julho.

Almeida *et al* [2008?], apontam que clima de inverno pode influenciar diretamente nos casos de infecção, por meio de variáveis como imunidade do hospedeiro e ambientes com pouca ventilação. Além disso, países de clima tropical, com alto índice de umidade, principalmente, nas estações de chuva, podem registrar a circulação do vírus em qualquer época do ano.

Dessa forma, abre-se outra perspectiva de estudo: efetuar análise em um estudo comparativo, entre os países do hemisfério Norte e Sul, a partir da aplicação do modelo apresentado nesta monografia, como proposta para a busca de explicação e previsão de um padrão de sazonalidade para o vírus Influenza A (H1N1) 2009, bem como determinar possíveis intervalos de ocorrências de infecção.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Flávia J. et al. [2008?] **Consenso para o tratamento e Profilaxia da Influenza (Gripe) no Brasil.** Disponível em: <[http://www.sbp.com.br/PDFs/conseso\\_influenza.pdf](http://www.sbp.com.br/PDFs/conseso_influenza.pdf)>. Acesso em 06 dez. 2012.
- BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.** São Paulo: Contexto, 2002.
- BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática & Implicações no Ensino e Aprendizagem de Matemática.** 2ª ed. Blumenau: FURB, 2004.
- BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino.** 5ª ed. 2ª reimpressão. São Paulo: Contexto, 2011.
- BORBAS, Maria Cleuza; BRUSCAGIM, Rosana Ruiz. Modelagem Plana e Tridimensional – *Moulage* – na indústria do vestuário. **Revista Ciências Empresariais da UNIPAR**, Umuarama, v. 8, n. 1 e 2, p. 155-167, jan./dez. 2007. Disponível em <<http://revistas.unipar.br/empresarial/article/viewFile/2679/2043>>. Acesso em: 06 dez. 2012.
- BRASIL. Ministério da Saúde. **Vademecum simplificado.** Brasília, DF: MS, 2010a. Disponível em <[http://portal.saude.gov.br/portal/arquivos/pdf/vademecum\\_simplificado\\_10\\_06\\_2010.pdf](http://portal.saude.gov.br/portal/arquivos/pdf/vademecum_simplificado_10_06_2010.pdf)>. Acesso em 07 dez. 2012.
- BRASIL. Ministério da Saúde. **Plano Brasileiro de Preparação para Enfrentamento de uma Pandemia de Influenza. IV Versão.** Brasília, DF: MS, 2010b. Disponível em <[http://portal.saude.gov.br/portal/arquivos/pdf/plano\\_influenza\\_iv\\_mai10\\_web2.pdf](http://portal.saude.gov.br/portal/arquivos/pdf/plano_influenza_iv_mai10_web2.pdf)>. Acesso em 07 dez. 2012.
- BRITO, Monique. Modelagem Molecular. **Portal da Educação**, jul. 2009. Disponível em: <[www.portaleducacao.com.br/biologia/artigos/6978/modelagem-molecular](http://www.portaleducacao.com.br/biologia/artigos/6978/modelagem-molecular)>. Acesso em: 06 dez. 2012.
- BURDEN, Richard L; FAIRES, Douglas J. **Análise Numérica.** São Paulo: Cengage Learning, 2008.
- CAMPOS, Márcio Francisco. **Modelagem, Sistemas e Informação. Volume I: Casos, Conceitos e Complexidades,** out. 2008. Disponível em <<http://www.camposmf.eti.br/MSICCC/msiccc.pdf>>. Acesso em: 06 dez. 2012.
- Centro Estadual de Vigilância em Saúde. Disponível em <[http://www.saude.rs.gov.br/lista/180/Centro\\_Estadual\\_de\\_Vigil%C3%A2ncia\\_em\\_Sa%C3%BAde](http://www.saude.rs.gov.br/lista/180/Centro_Estadual_de_Vigil%C3%A2ncia_em_Sa%C3%BAde)>. Acesso em: 06 dez. 2012.
- CENTRO ESTADUAL DE VIGILÂNCIA EM SAÚDE. **Boletim Epidemiológico preliminar da Influenza A (H1N1) 2009 no RS até 24/09/12 (Semana**



**epidemiológica 41).** Disponível em <  
[http://www.saude.rs.gov.br/upload/1349960214\\_Avaliacao\\_Influenza\\_A\\_H1N1\\_10\\_10\\_12.pdf](http://www.saude.rs.gov.br/upload/1349960214_Avaliacao_Influenza_A_H1N1_10_10_12.pdf)>. Acesso em 07 dez. 2012.

CLAUDIO, Daucídio Moraes. MARINS, Jussara Maria. **Cálculo Numérico Computacional**. 3ª ed. São Paulo: Atlas, 2000.

HOSPITAL DE CLÍNICAS DA FACULDADE DE MEDICINA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. **Recomendações para o manejo de pacientes com infecção pelo vírus Influenza A (H1N1)**. São Paulo: FMUSP, [2009?]. Disponível em <  
[http://www.tele.medicina.ufg.br/files/PROTOCOLO\\_H1N1\\_-\\_HCFMUSP\\_-\\_AGOSTO\\_2009.pdf](http://www.tele.medicina.ufg.br/files/PROTOCOLO_H1N1_-_HCFMUSP_-_AGOSTO_2009.pdf)>. Acesso em 07 dez. 2012.

LISBOA, Erico. **Introdução à Pesquisa Operacional**, [20--?]. Disponível em <  
<http://www.ericolisboa.eng.br/cursos/apostilas/po/cap1.pdf>>. Acesso em 06 dez. 2012.

MARTINS, Letícia Garay; et. al. A vigilância da Influenza no Rio Grande do Sul. In: **Boletim Epidemiológico**. Rio Grande do Sul, v. 13, n.3 p. 1-16, set. 2011. Disponível em <  
[http://www.saude.rs.gov.br/upload/20120611094045boletim\\_epidemiologico\\_tematico\\_set\\_2011\\_\\_\\_avaliacao\\_vigilancia\\_influenza\\_no\\_rs.pdf](http://www.saude.rs.gov.br/upload/20120611094045boletim_epidemiologico_tematico_set_2011___avaliacao_vigilancia_influenza_no_rs.pdf)>. Acesso em 07 dez. 2012.

MATO GROSSO DO SUL. Secretaria de Vigilância em Saúde. **Caderno 1 Influenza**. Mato Grosso do Sul, [2009?], 25 p. Disponível em <  
[http://portal.saude.gov.br/portal/arquivos/pdf/gve\\_7ed\\_web\\_atual\\_influenza.pdf](http://portal.saude.gov.br/portal/arquivos/pdf/gve_7ed_web_atual_influenza.pdf)>. Acesso em 06 dez. 2012.

Organização Mundial da Saúde. Disponível em <  
<http://www.who.int/countries/bra/es/>>. Acesso em 07 dez. 2012.

PASQUALI, Luiz. **A Curva Normal**. Disponível em: <  
[www.psi-ambiental.net/pdf/PasqCap03.pdf](http://www.psi-ambiental.net/pdf/PasqCap03.pdf)>. Acesso em 06 dez. 2012.

PEQUITO, Danielle. **Influenza A H1N1**. Disponível em <  
[www.cescage.edu.br/new/ah1n1/Influenza\\_A\\_H1N1.pdf](http://www.cescage.edu.br/new/ah1n1/Influenza_A_H1N1.pdf)>. Acesso em 06 dez 2012.

REHFELDT, Márcia Jussara Hepp. Aplicações de modelos matemáticos em situações-problemas empresariais, com uso do software LINDO. **FAMAT em Revista**, Urbelândia, n. 5, p. 127-146, set. 2005. 299 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação)- UFRGS, Porto Alegre, 2009.

RODRIGUES, Bruna Furlaneto et al. Vírus Influenza e o organismo humano. **Revista APN**, v. 10, n. 2, p. 210-216, jul./dez. 2007. Disponível em <  
<http://www.ufjf.br/nates/files/2009/12/13virus.pdf>>. Acesso em 07 dez. 2012.

SACRAMENTO, Patrícia Rossi do. **Diversidade genética da neuraminidase de vírus Influenza A, isolados de crianças internas na cidade de São Paulo, de 1995 a 2006**. 2010. 61f. Dissertação (Mestrado em Biotecnologia) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

SANTOS, Juliana Lázara Curcino dos; BONFIM, Lúcia Resende Pereira. **Algumas Aplicações e Teorias Qualitativas das Equações Diferenciais Ordinárias.** Disponível em < <http://www.inf.unioeste.br/~rogerio/EDO-TQaplicacao.pdf>>. Acesso em: 06 dez. 2012.

Secretaria Estadual da Saúde do Estado do Rio Grande do Sul. Disponível em <<http://www.saude.rs.gov.br/>>. Acesso em 07 dez. 2012.