

# *Revista da Graduação*

---

Vol. 4

No. 2

2011

20

---

**Seção: FACULDADE DE INFORMÁTICA**

Título: Uma assinatura fractal do  
condicionamento de sistemas de equações

Autor: Gabriel Ohse Deon

Este trabalho está publicado na Revista da Graduação.

ISSN 1983-1374

<http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/graduacao/article/view/10086/7116>

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL  
FACULDADE DE INFORMÁTICA  
CURSO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

GABRIEL OHSE DEON

**UMA ASSINATURA FRACTAL DO CONDICIONAMENTO DE SISTEMAS DE  
EQUAÇÕES**

Porto Alegre  
10 de outubro de 2011

GABRIEL OHSE DEON

**UMA ASSINATURA FRACTAL DO CONDICIONAMENTO DE SISTEMAS DE  
EQUAÇÕES**

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado à Faculdade de Informática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Ciência da Computação.

**Orientador: profa. Beatriz R. Tavares Franciosi**

Porto Alegre  
10 de outubro de 2011

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por cada experiência que vivenciei, sendo ela boa ou má, pois elas moldaram quem sou.

Agradeço a Deus pelos desafios, pois eles permitiram que eu conhecesse meus limites para poder superá-los.

Agradeço a Deus pelas cicatrizes, pois elas me recordam das dificuldades que sofri e me fazem dar valor àquilo que conquistei.

Agradeço a Deus pela minha família, pois sem ela nada do que fiz teria qualquer sentido.

Agradeço a minha Mãe por ter sofrido quando eu sofri, por ter comemorado comigo a cada vitória e, enfim, por ter sido o pilar que me manteve firme quando as minhas bases ruíram.

Agradeço a minha professora orientadora por ter me motivado e acreditado em mim quando eu não acreditava.

Agradeço, enfim, a todos aqueles que dispuseram uma parte de seu tempo para ouvirem as minhas ideias malucas e lerem sobre o meu famigerado trabalho.

A todos que de alguma forma contribuíram para que este trabalho pudesse ser realizado o meu mais sincero “Até logo e obrigado pelos peixes”.

Deus é o caos criador da ordem.  
A ordem que retorna ao caos.  
O caos que se converte em ordem  
na massa pulsante do infinito.

**Valter da Rosa Borges**

## RESUMO

Este é um trabalho na área da Análise Numérica a qual tem como questão fundamental a resolução numérica de problemas matemáticos. O trabalho consiste na exploração da relação entre estabilidade do problema e qualidade de resultados obtidos a partir da utilização de algoritmos numéricos. De fato, trata-se da verificação da possibilidade de uso de fractais na análise da estabilidade de problemas matemáticos.

O objetivo geral do trabalho consiste em utilizar o conceito de dimensão fractal, em seu sentido mais amplo, medida de complexidade da estrutura de um fractal, doravante referenciado como índice de fractalidade, para analisar o condicionamento de sistemas de equações. Esta análise considera dois aspectos: análise da instabilidade do problema; análise da instabilidade do algoritmo. A análise da instabilidade do problema utiliza medidas de condicionamento já existentes e descritas na bibliografia de referência. Por sua vez, a análise de instabilidade do algoritmo será fundamentada na utilização de métodos numéricos para resolução de sistemas de equações.

**Palavras-chave:** Problemas mal condicionados. Estabilidade do processo de solução. Algoritmo numérico. Métodos numéricos. Métodos iterativos. Dimensão Fractal. Sistemas de equações.

## ABSTRACT

This is a work in the area on the Numeric Analysis which has as fundamental subject the numeric resolution of mathematical problems. The scenery of this work consists of the exploration of the relationship between stability of the problem and quality of results obtained from numeric algorithms. In fact, the focus of the work is the study of the conditioning of systems of equations and the investigation about the possibility of the analysis of the instability of a problem through fractals.

The main aim of the work consists of uses the concept of dimension fractal, in its wider sense, measure of complexity of the structure of a fractal, from now on referred as fractal index, to analyze the conditioning of numeric algorithms to systems of equations resolution. This analysis will happen considering two aspects: problem instability analysis; algorithm instability analysis. The problem instability analysis will use conditioning measures already existent and described in the bibliographical reference. By the way, the algorithm instability analysis will be based in the use of numeric methods to systems of equations resolution.

**Keywords:** Ill-conditioned problems. Stability of the solution process. Numeric algorithm. Numeric methods. Fractal. Systems of equations.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Conjunto de Julia.....	16
Figura 2: O Brócolis.....	16
Figura 3: Atrator Estranho de Lorenz .....	17
Figura 4: Esponja de Menger .....	19
Figura 5: Conjunto de Mandelbrot .....	19
Figura 6: Vôo de Levy .....	19
Figura 7: Triângulo de Serpiensky.....	21
Figura 8: O Box Counting .....	23
Figura 9: O Homem Vitruviano .....	26
Figura 10: Gráfico $\log(M') \times \log(r)$ .....	27
Figura 11: João Teimoso.....	38
Figura 12: O pêndulo.....	38
Figura 13: Atrator Estranho com equações diferenciais.....	39
Figura 14: Newton Fractal .....	41
Figura 15: Gráficos de Atração.....	44
Figura 16: Gráfico de Junção .....	45
Figura 17: Ambiente Computacional .....	49
Figura 18: Aplicação desenvolvida (Bifrost), em detalhe.....	53
Figura 19: Entrada de dados em notação matricial do Octave.....	54
Figura 20: Gráfico da órbita de origem no ponto (0,0) calculado por Jacobi.. .....	57
Figura 21: Gráfico da órbita de origem no ponto (0,0) calculado por Seidel. ....	57
Figura 22: Gráfico das órbitas calculadas pelo método de Jacobi. ....	59
Figura 23: Gráfico das órbitas calculadas pelo método de Seidel.....	59
Figura 24: Gráfico da superfície de velocidade de convergência - Jacobi. ....	61
Figura 25: Gráfico da superfície de velocidade de convergência - Seidel.....	61
Figura 26: Gráfico da Bacia de Convergência calculado por Jacobi. ....	63
Figura 27: Gráfico da Bacia de Convergência calculado por Seidel.....	63
Figura 28: Gráfico de Interdependência das variáveis – única órbita - Jacobi. ....	64
Figura 29: Gráfico de Interdependência das variáveis – única órbita - Seidel.....	66
Figura 30: Gráfico de Interdependência das variáveis – grupo - Jacobi.....	66



Figura 31: Gráfico de Interdependência das variáveis – grupo –Seidel. ....	66
Figura 32: Gráfico de Dimensão Fractal sobre o sistema calculado por Jacobi.. ....	67
Figura 33: Gráfico de Dimensão Fractal sobre o sistema calculado por Seidel. ....	68
Figura 34: Cenários - órbita 2D - Jacobi.....	70
Figura 35: Cenários - órbitas 3D - Jacobi.....	70
Figura 36: Cenários - superfície de velocidade de convergência - Jacobi. ....	71
Figura 37: Cenários - Interdependência das variáveis – única órbita - Jacobi. ....	72
Figura 38: Cenários - Interdependência das variáveis – grupo - Jacobi.....	72
Figura 39: Cenários - bacia de convergência - Jacobi. ....	73
Figura 40: Cenários - órbitas em pontos - Jacobi.....	73
Figura 41: Cenários - dimensão fractal - Jacobi.....	74
Figura 42: Cenários - órbita 2D - Seidel.....	74
Figura 43: Cenários - órbitas 3D - Seidel. ....	75
Figura 44: Cenários - superfície de velocidade de convergência - Seidel.....	75
Figura 45: Cenários - Interdependência das variáveis – única órbita - Seidel.....	76
Figura 46: Cenários - Interdependência das variáveis – grupo - Seidel.....	76
Figura 47: Cenários - bacia de convergência - Seidel.....	76
Figura 48: Cenários - órbitas em pontos - Seidel. ....	77
Figura 49: Cenários - dimensão fractal - Seidel. ....	77
Figura 50: Gráfico do tipo Norma x Dimensão Fractal. ....	78

## LISTA DE TABELAS

QUADRO 1: Cenários – Estável – Médio – Instável.....	69
--	----

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO .....	10
1.1 CENÁRIO .....	10
1.2 MOTIVAÇÃO .....	13
2 IDÉIAS NORTEADORAS DO TRABALHO .....	15
2.1 FRACTAIS .....	15
2.1.1 Dimensão Fractal .....	20
2.1.1.1 MÉTODO DA CONTAGEM DE CAIXAS (BOX COUNTING) .....	22
2.1.1.2 MÉTODO DA MASSA RAIOS .....	24
2.1.2 Dimensão fractal Multiescala (DFM) .....	25
2.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES .....	28
2.2.1 Sistemas de Equações Lineares .....	28
2.3.1 Norma Vetorial e Matricial .....	30
2.3.2 Condicionamento de uma Matriz .....	31
2.4 MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES .....	33
2.4.1 Resolução Numérica de Sistemas Lineares .....	34
2.4.1.1 MÉTODO DE GAUSS-JACOBI .....	34
2.4.1.2 MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL .....	34
3 ESPECIFICAÇÃO DO PROJETO .....	36
3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA .....	36
3.1.1 Análise e ajustes no Modelo Matemático .....	46
3.2 PROJETO DE AMBIENTE PARA EXPLORAÇÃO VISUAL DA MODELAGEM MATEMÁTICA .....	49
3.3 APLICAÇÃO DESENVOLVIDA .....	51
3.3.1 Gráficos .....	55
4 CONSTRUÇÃO DE CENÁRIOS PARA ENCAMINHAMENTO DA CONCLUSÃO .....	69
4.1 VALIDAÇÃO DO MODELO .....	77
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	79
REFERÊNCIAS .....	83
BIBLIOGRAFIA .....	85
ANEXO A .....	88
ANEXO B .....	88

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CENÁRIO

A Análise Numérica diz respeito ao estudo e análise de algoritmos que manipulam valores numéricos para resolução de problemas matemáticos.

Existem diversas aplicações da Análise Numérica em Engenharia, Física, Ciências, Artes, etc. Equações diferenciais que modelam o movimento de corpos (planetas, estrela e galáxias), otimização aplicada ao gerenciamento de portfólios, álgebra linear numérica aplicada à análise de dados; equações diferenciais estocásticas e cadeias de Markov utilizadas para simulação da vida de células.

O objetivo geral da Análise Numérica consiste no projeto e análise de técnicas para estimar a solução de problemas de difícil solução como, por exemplo, previsão numérica do tempo (métodos numéricos), previsão da trajetória de naves espaciais (equações diferenciais ordinárias), simulação computacional de colisão de veículos (equações diferenciais parciais), cálculo dos rendimentos de fundos de pensão (recursos diversos da análise numérica), algoritmos de otimização mais elaborados para definir o preço das passagens e da tripulação (pesquisa operacional), atualização atuarial de companhias de seguro (programas numéricos).

O surgimento da Análise Numérica precede a dos computadores modernos, existindo registros sobre sua utilização pelos antigos babilônios há 3700 anos. Um exemplo é o clay tablet babilônico YBC 7289 que fornece uma aproximação sexagesimal de  $\sqrt{2}$  (YBC7289), disponível através do link <<http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath/tablets/YBC7289.html>>).

Grandes matemáticos do passado realizaram suas pesquisas na área e perpetuaram seus nomes através de algoritmos como, por exemplo o método de Newton; interpolação polinomial de Lagrange; eliminação de Gauss ou método de Euler.

A Análise Numérica está dividida em diversas áreas que, por sua vez, estão associadas à solução de diferentes problemas como avaliação de funções; interpolação, extrapolação e regressão; resolução de equações e de sistemas de equações; autovalores; otimização; integração numérica; equações diferenciais.

Um conceito relevante no âmbito da Análise Numérica é o da estabilidade numérica, o qual é utilizado na classificação de problemas quanto a sua sensibilidade aos dados iniciais ou dados de entrada.

Um problema é dito numericamente estável se uma pequena perturbação nos dados de entrada não é propagada drasticamente através dos cálculos realizados e é considerado instável caso contrário.

Matematicamente, um mesmo problema pode ser resolvido tanto através de métodos diretos quanto de métodos iterativos. Os métodos diretos produzem respostas exatas sempre que é utilizada a aritmética em precisão infinita. O método direto consiste na obtenção de solução através da realização de um número finito e pré-definido de operações aritméticas sobre os valores numéricos informados na entrada. O método de eliminação de Gauss é um exemplo deste tipo de método. A solução obtida através de métodos iterativos consiste no valor para o qual converge a sequência de aproximações gerada a partir dos dados de entrada, sendo que para geração da sequência é utilizada uma fórmula iterativa. O método de Newton é um exemplo de método iterativo.

A computação numérica utiliza métodos numéricos na resolução de problemas computáveis. Entende-se por problemas computáveis todo problema que pode ser solucionado através de uma sequência finita de passos (algoritmo) que soluciona o problema de modo que este possua tempo finito de execução nos casos em que a resposta é afirmativa, entretanto quando a resposta esperada for negativa o algoritmo pode parar (rejeitar) ou pode continuar processando indefinidamente (loop infinito).

Os computadores são máquinas discretas e possuem memória finita, o que necessariamente implica na falta de acurácia na representação de números que excedam o limite, em bits, da memória do computador ou do maior número de máquina disponível como, por exemplo, as dízimas periódicas.

Tal falta de exatidão advém do momento em que o número, em geral infinito ou suficientemente grande para que exceda a precisão máxima definida na máquina, deve ser arredondado. A partir deste ponto toda e qualquer solução obtida será uma aproximação e, portanto, possuirá uma certa quantidade de erro em relação à resposta exata. Por estas razões quando utilizamos métodos diretos para resolver um problema em computador, a solução encontrada, em geral, é uma aproximação da solução exata.

Os métodos iterativos são, em primeira instância, uma alternativa à utilização dos métodos diretos para solução de problemas em computador, sendo que sua principal vantagem está na possibilidade de especificar a qualidade da resposta através dos critérios de parada.

A partir desta apresentação é possível contextualizar a área e o cenário onde este Trabalho de Conclusão se inclui, ou seja, este é um trabalho na área da Análise Numérica a qual tem como questão fundamental a resolução numérica de problemas matemáticos. O cenário do trabalho consiste na exploração da relação entre estabilidade do problema e qualidade de resultados obtidos a partir da utilização de algoritmos numéricos. Este é um trabalho na área da Análise Numérica a qual tem como questão fundamental a resolução numérica de problemas matemáticos. O trabalho consiste na exploração da relação entre estabilidade do problema e qualidade de resultados obtidos a partir da utilização de algoritmos numéricos. De fato, trata-se da verificação da possibilidade de uso de fractais na análise da estabilidade de problemas matemáticos.

O objetivo geral do trabalho consiste em utilizar o conceito de dimensão fractal, em seu sentido mais amplo medida de complexidade da estrutura de um fractal, doravante referenciado como índice de fractalidade, para analisar o condicionamento de sistemas de equações. Esta análise considera dois aspectos: análise da instabilidade do problema; análise da instabilidade do algoritmo. A análise da instabilidade do problema utiliza medidas de condicionamento já existentes e descritas na bibliografia de referência. Por sua vez, a análise de instabilidade do algoritmo será fundamentada na utilização de métodos numéricos para resolução de sistemas de equações.

Para atingir o objetivo geral foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Estudo e implementação de pelo menos duas medidas para estimar o condicionamento do problema
- Estudo e implementação de dois métodos numéricos para resolução de sistemas lineares
- Estudo e resolução de pelo menos um método de resolução de sistemas não-lineares
- Estudo de estratégias para visualização do condicionamento de sistemas através da utilização do índice de fractalidade

- Implementação de um ambiente para visualização do condicionamento

Também faz parte deste escopo o desenvolvimento da habilidade de aplicar conhecimentos adquiridos no curso na resolução de problemas matemáticos; buscar e selecionar informações de qualidade técnico-científica visando à elaboração de uma modelagem computacional; definir e dimensionar a infra-estrutura de software e hardware necessário para o desenvolvimento da aplicação; elaborar um relatório de atividades que possibilite a compreensão do trabalho realizado.

## 1.2 MOTIVAÇÃO

Segundo (SPERANDIO; MENDES, 2003, p.3) entende-se por método numérico:

Método numérico é um conjunto de procedimentos utilizados para transformar um modelo matemático num problema numérico ou o conjunto de procedimentos usados para resolver um problema numérico.

Tais métodos são utilizados, principalmente, quando o problema não possui solução analítica e, portanto, precisa ser resolvido numericamente.

Um exemplo de aplicação de métodos numéricos consiste na análise da estrutura de uma aeronave por meio do método de elementos finitos que, em última instância, produz um sistema de equações lineares de grande porte, com mais de 5 mil equações (exemplo retirado de HUEBNER(1963)).

Dada a grande gama de situações matemáticas onde sistemas de grande porte, muitas vezes esparsos ou não-lineares são necessários para a resolução de problemas é compreensível a importância dos métodos numéricos na vida cotidiana.

A computação, grande aliada dos métodos numéricos, permite a exequibilidade da imensa quantidade de cálculos requeridos por estes métodos.

Dentro deste contexto encontram-se os métodos iterativos, descritos na seção 2.4, aos quais este trabalho dá maior enfoque.

Ao realizar-se uma análise sobre a sequência de valores gerados por um método iterativo qualquer se percebe que o número de iterações realizadas depende, principalmente, do valor inicial ou “chute inicial”. Também que a sequência de valores pode ou não convergir para a solução. Então, recursos para estimar

bons chutes iniciais são muito importantes para a resolução computacional exitosa de problemas matemáticos.

Ou seja, o valor utilizado como “chute inicial”, além de servir como um delimitador de iterações assume um papel fundamental para a resolução do problema.

Tal papel pode ser compreendido quando se atenta ao fato de que, mesmo quando o teste de convergência de Gauss-Seidel é satisfeito a convergência da sequência de aproximações pode vir a ser muito demorada, o que, na literatura é chamado de “convergência lenta”.

Deste modo tem-se que, embora hajam meios de determinar o quão suscetível aos dados iniciais (norma), quantos dígitos de precisão se pode obter para a aproximação calculada (condicionamento) e estipular um erro máximo aceitável para a resposta obtida (critério de parada), não há algum recurso visual que possibilite analisar como a instabilidade influi no processo de solução.

Além disto o valor escalar obtido, referente a instabilidade de um problema, não contempla o quão distante um número dado como “chute inicial” deve estar de uma solução de modo que o processo de solução convirja. A partir deste pensamento tem-se que, dado dois problemas  $A$  e  $B$ , sendo  $A$  o mais instável, os valores iniciais para  $A$  não necessariamente devem estar mais próximos da solução que os dados iniciais de  $B$ , para que o processo de solução de  $A$  convirja.

Visando suprir esta necessidade a modelagem proposta neste trabalho de conclusão foi idealizada.



## 2 IDÉIAS NORTEADORAS DO TRABALHO

Nesta seção estão reunidas as ideias norteadoras do trabalho que constituem a fundamentação teórica.

### 2.1 FRACTAIS

A mente humana é regida pela razão e é através dela que agregamos “sentido” aos estímulos que recebemos do meio externo. Por esta característica o ser humano possui uma axiomática necessidade de “ordem” sentindo-se impelido a determinar, catalogar, explicar, enfim, em distinguir um padrão em cada objeto, em cada fato observado.

Assim, é da natureza humana negar o que não pôde, de algum modo, ser compreendido pelo estreito olhar humano. Este pode ter sido o motivo da dominância do paradigma determinístico.

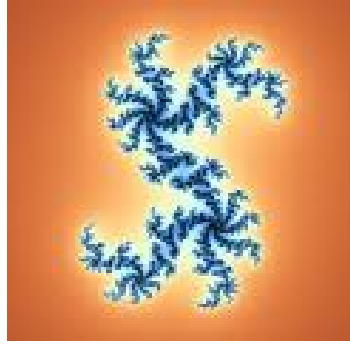
No entanto, justamente numa época em que os pesquisadores deterministas mais exaltados acreditavam que era possível prever o futuro com base nos dados do presente, outros revelam objetos de uma geometria “não-euclidiana” que, entre outras coisas, desafiavam a visão determinística da comunidade científica da época.

Tais objetos foram classificados como “monstros matemáticos” por desafiarem as noções existentes de infinito e para os quais parecia não haver explicação objetiva.

Por muito tempo, tais objetos, transitaram na periferia das pesquisas acadêmicas.

Conforme o tempo avançava e diversas pesquisas abriam espaço para novas concepções do universo através da quebra dos paradigmas até então estabelecidos, surgia, timidamente, os fundamentos que acabariam na criação de uma nova geometria, a geometria dos fractais.

Um exemplo de fractal pode ser observado na Figura 1 que apresenta o conjunto de Julia.



**Figura1: Conjunto de Julia**

Fonte: <http://casanovas.blogia.com/temas/quantitative-art.php>

Por diversos séculos, os objetos e conceitos da filosofia e da geometria Euclidiana foram aceitos como os que melhor descreviam o universo, no entanto com a publicação das obras do matemático francês de origem judaico-polonesa Benoît B. Mandelbrot, em especial, “The Fractal Geometry of Nature” publicada em 1982, iniciou-se uma revolução sobre uma série de concepções que, até então, eram aceitas sobre diversos fenômenos que ocorrem na natureza. O próprio Mandelbrot, idealizador dos fractais, costuma brincar dizendo que o fruto de suas pesquisas veio das “lixerias” da ciência.

A célebre frase: “*Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, o som do latido não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta*” (MANDELBROT, 1983) ilustra de forma quase inquestionável a incapacidade da geometria Euclidiana para representar fenômenos naturais. A Figura 2 ilustra a semelhança entre fractais e formas existentes na natureza.



**Figura2: O Brocolis: Um Brócolis visto como um exemplo que comprova a proximidade entre a natureza e os fractais.** Fonte: <http://www.infojardin.com/foro/showthread.php?p=527653>

Intimamente ligados à ciência do caos, os fractais são figuras extremamente complexas que possuem sua própria dimensão- a dimensão fractal.

O estudo dos fractais constitui uma área da matemática chamada de geometria fractal a qual vem sendo utilizada em diversas áreas de conhecimento com excelentes resultados.

Oriunda da Teoria do caos que sugere um padrão para a aleatoriedade existente no universo. Os fractais são conhecidos por, na maioria dos casos, serem os “atratores estranhos” (Figura 3) de sistemas complexos como infere-se ser o caso em questão, portanto, deve ser possível inferir uma conexão entre os valores gerados pela seqüência iterativa de um método numérico com o fractal que servira de atrator do sistema.



**Figura3: Atrator Estranho de Lorenz**

Fonte: <http://otaodabiologia.wordpress.com/2008/11/05/do-caos-ao-mel/>

O termo fractal é um neologismo derivado do adjetivo em latim “*fractus*” que significa quebrado, partido ou fragmento irregular e foi cunhado pelo matemático Benoît Mandelbrot em 1975.

De maneira informal pode-se dizer que tais objetos são figuras abstratas de extrema beleza da geometria não-euclidiana formadas por padrões que se repetem infinitamente em uma área finita (auto-similaridade infinita e complexidade infinita).

O que se sabe, no entanto, é que a complexidade de tais figuras extrapola a maioria das conjecturas que se possa lhes atribuir e é por isto que, embora muitas definições venham sendo criadas nos últimos anos, infelizmente, não existe uma definição formal única que consiga definir todos os seus diferentes aspectos de forma exata e ser aceita pela comunidade científica. Deste modo a maioria dos estudos realizados sobre o tema ainda se baseia na primeira definição que se tem

do termo que é segundo (MANDELBROT, 1983): *“Fractal é por definição um sistema organizado para o qual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica.”* Pouco tempo depois de escrevê-la o próprio Mandelbrot reconheceu que esta era muito restritiva mesmo apresentando conceitos pertinentes como o da dimensão fractal que será abordada de forma mais detalhada no item “Dimensão Fractal”.

A caracterização desta dimensão se deve aos matemáticos Hausdorff (alemão) que, em 1918, apresentou a possibilidade das dimensões serem representadas por números não inteiros e Besicovith (russo) que formalizou a equação matemática.

As características principais dos fractais são, segundo BORSSOI (2005, p.11):

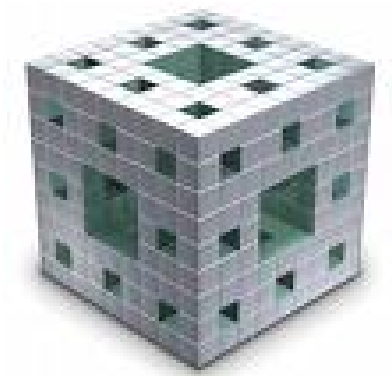
**Auto-similaridade:** Ao tomarmos um trecho do fractal, percebemos que tal trecho é semelhante ao fractal, apenas com uma redução na escala, do tamanho original. Esta característica permanece em qualquer nível de construção do fractal;

**Estrutura fina:** O grau de detalhamento de um fractal não diminui se examinarmos uma porção arbitrariamente pequena do mesmo. O fractal possui detalhes em partes tão pequenas como podemos imaginar;

**Simplicidade da lei de formação:** o alto grau de detalhamento e a complexidade da estrutura de um fractal não impedem que sejam formados por processos simples. Assim é possível construirmos fractais, aplicando algoritmos.

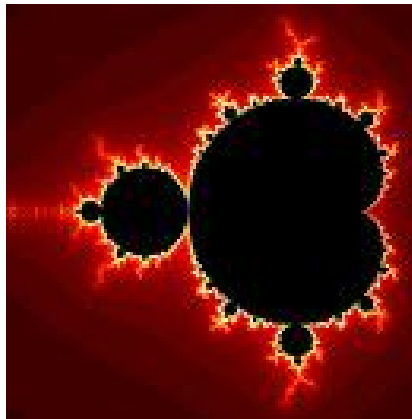
Os fractais podem ser classificados em três categorias principais que remetem ao modo como o fractal é gerado. As categorias são:

- **Sistemas de Funções Iteradas:** Os fractais pertencentes a esta categoria são criados através de uma regra fixa de substituição geométrica. Alguns exemplos são o conjunto de Cantor, tapete de Sierpinski, Sierpinski gasket, Curva de Peano-Gosper, Floco de Neve de Koch, Curvado Dragão de Harter-Heighway, T-Square, Esponja de Menger (Figura 4).
- **Fractais de fuga no Tempo:** Este tipo de fractal é definido por uma relação de recorrência em cada ponto do espaço (tal como o plano complexo). Alguns exemplos deste tipo de fractal são o conjunto de Mandelbrot (Figura 5) e o fractal de Lyapunov.
- **Fractais Aleatórios:** Gerados por processos estocásticos ao invés de determinísticos, por exemplo, terrenos fractais e o vôo de Lévy (Figura 6).



**Figura4: Esponja de Menger.**

Fonte:<http://biciclotheke.wordpress.com/page/2/>



**Figura5: Conjunto de Mandelbrot.**

Fonte:[http://webs.um.es/jmz/DiseGrafSimula/alumnos\\_08\\_09/german\\_ros/index.files/fractal1\\_Intro%2001.html](http://webs.um.es/jmz/DiseGrafSimula/alumnos_08_09/german_ros/index.files/fractal1_Intro%2001.html).



**Figura6: Vôo de Levy.**

Fonte:<http://proascg2.pbworks.com/fractais>.

Outra classificação possível dos fractais está fundamentada na característica da auto-similaridade (principal característica dos fractais):

- **Auto-similaridade Exata:** É a forma mais evidente de auto-similaridade. Nela a ínfima parte é uma cópia idêntica do todo, ou seja, o fractal é o mesmo quando observado em diferentes escalas. Fractais gerados por funções iteradas costumam gerar este tipo de auto-similaridade.
- **Quase Auto-similaridade:** Os fractais pertencentes a esta categoria revelam, quando observados em diferentes escalas, cópias distorcidas, mas semelhantes, do fractal inteiro. Fractais gerados por relações de recorrência geralmente tendem a ser quase auto-similares.
- **Auto-similaridade estatística:** Esta forma de auto-similaridade é a mais sutil dentre todas. Nela existem medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas. É importante ressaltar que um fractal com esta auto-similaridade não é quase e nem exatamente auto-similar. Fractais aleatórios costumam possuir esta característica.

### 2.1.1 Dimensão Fractal

Devido aos inúmeros significados que o termo “dimensão” possui, faz-se necessária, a fim de evitar interpretações errôneas do termo, uma pequena explicação sobre o significado deste termo no contexto deste trabalho.

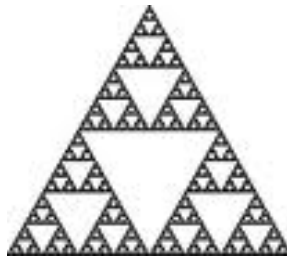
Quando o termo citado for utilizado ele sempre será acompanhado de uma das duas palavras: topológica ou fractal. Deste modo o termo assumirá duas interpretações, ora referindo-se a dimensionalidade do espaço no qual um objeto está inserido, ora referindo-se a quão densamente um objeto ocupa o espaço métrico em que está inserido, dimensão topológica e dimensão fractal respectivamente.

Durante muito tempo, matemáticos e geômetras têm caracterizado elementos da geometria segundo a sua dimensão topológica. A dimensão topológica que se atribui a uma figura qualquer é sempre um valor inteiro que representa o número mínimo de coordenadas cartesianas necessárias para sua representação.

Seguindo este conceito um ponto tem dimensão topológica 0, uma reta tem dimensão topológica 1, uma superfície tem dimensão topológica 2 e um sólido tem dimensão topológica 3.

Com o aparecimento das figuras fractais surgiu a necessidade de uma abordagem mais complexa sobre a dimensionalidade de um objeto, dadas as suas características especiais.

Para exemplificar este pensamento toma-se o caso do conhecido Triângulo de Serpinsky (Figura 7) que possui perímetro infinito e área nula. Esta figura não pode ser considerada como um objeto euclidiano unidimensional, pois possui perímetro infinito, por outro lado também não pode ser classificado como um objeto bi-dimensional (dimensão topológica 2), pois possui área nula (SOUSA, 2003).



**Figura7: Triângulo de Sierpinski**

Fractal com perímetro infinito e área nula, possuindo dimensão fractal 1,585.

Fonte: <http://jfnunes.wordpress.com/2007/08/21/tapete-de-sierpinski/>

Deste tipo de reflexão nasceram as dimensões representadas por números fracionários e com elas o termo “dimensão fractal”(MANDELBROT, 1983).

Segundo Serra, (SERRA, C., 1997, p. 15):

As dimensões fracionárias são usualmente denominadas dimensão fractal. Quando um fractal apresenta auto-similaridade estrita, sua dimensão pode ser determinada por um método simples que se delineia na passagem de um dado nível na construção do fractal para o nível imediatamente seguinte. Sendo assim basta anotarmos: o número  $p$  de subpartes similares que se tomam no lugar de uma dada parte fractal; o fator de redução  $q$  da parte considerada para cada subparte que entra em seu lugar. A dimensão espacial é calculada, então pela quantidade:

$$\text{dim} = \frac{\log p}{\log q}$$

O valor atribuído a uma dimensão fractal é um valor fracionário devido ao fato de que tal valor representa o quão denso é o nível de ocupação do espaço pela forma e não do espaço em si. Assim, caracteriza-se a dimensão fractal como uma medida da superfície efetiva de contato do objeto e o seu meio. Deste modo quanto

maior for este valor, maior será a sua superfície de contato e, portanto, mais complexo será o objeto.

Embora este pensamento possa levar à errônea conclusão de que é possível analisar a complexidade estrutural de qualquer objeto através de sua dimensão fractal deve-se atentar que de forma análoga ao que ocorre quando tentamos atribuir um valor em dimensão topológica para um fractal, caracterizar as formas da natureza através de sua dimensão fractal é um modo limitado de representação.

Isto se deve, principalmente, ao fato de que a maioria dos objetos encontrados na natureza não são perfeitamente fractais, ou seja, não possuem auto-similaridade infinita. Deste modo qualquer objeto com tamanho finito apresenta, em geral, dimensão fractal tendendo a zero quando analisado em escalas cada vez maiores.

Segundo (PLOTZE; BRUNO, 2007):

É importante salientar que as formas fractais são idealizações que podem não existir na natureza, e nem mesmo serem corretamente representadas no computador. Estes fatos se devem a dois motivos: (i) a autosimilaridade infinita não pode ser representada na natureza e (ii) as limitações do processo de digitalização das imagens tendem a extinguir pequenos detalhes da imagem. Dessa maneira, é necessário assumir (para o caso de imagens digitais principalmente) que formas fractais possuem fractalidade limitada.

Na literatura existem várias técnicas utilizadas para se estimar a dimensão fractal de um objeto ou imagem, sendo, a maioria delas, baseadas na dimensão de Hausdorff-Besicovitch.

Para obtenção dos valores da dimensão fractal nos experimentos deste trabalho usar-se-ão duas abordagens, a abordagem comum, e a abordagem multi-escala. Os métodos utilizados neste trabalho são o da contagem de caixas (Box Counting) e o método da Massa Raio.

#### 2.1.1.1 MÉTODO DA CONTAGEM DE CAIXAS (BOX COUNTING)

O método de contagem de caixas (Box Counting) consiste, como seu nome sugere, numa contagem de células (caixas) definidas na expressão, (COELHO; COSTA, 1995):

$$N^i(s)$$



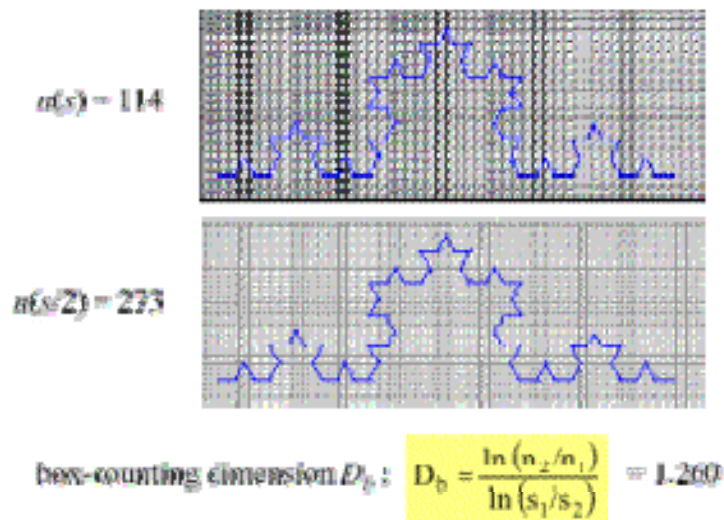
onde:

$i$  indica a ordem cronológica em que será realizada a contagem;

$s$  é o tamanho das células (caixas) definida para uma certa iteração  $i$ ;

$N^i(s)$  é o número de células com um tamanho  $\varepsilon$  necessárias para cobrir toda a área de uma imagem em uma iteração  $i$ .

A cada nova iteração atribui-se valores distintos para  $\varepsilon$ . Deste modo é intuitiva a dedução que, quanto menor for o valor agregado a  $\varepsilon$  maior será o número de caixas necessárias para cobrir a área total da imagem (Figura 8).



**Figura8: O Box Counting: Método de contagem de caixas aplicado sobre a curva de Koch.**Fonte:

[http://www.inspiredeconomies.com/intelligibleecosystems/EcoVis\\_org/fractal\\_dimension.htm](http://www.inspiredeconomies.com/intelligibleecosystems/EcoVis_org/fractal_dimension.htm)

A dimensão fractal estimada pelo método da contagem de caixas é obtida pela relação existente entre  $N(s)$  e  $s$ , sendo definida por:  $N(s) \sim s^{-d}$ . Assim a determinação da dimensão fractal  $d$  fica definida como  $d \sim \frac{\log(N(s))}{-\log(s)}$  (SERRA, J., 1982; COSTA; CESAR, 2000).

De forma geral, para que seja possível obter a dimensão fractal de um dado objeto, vide este método, deve-se calcular os diferentes  $N(s)$  de cada iteração e construir um gráfico do tipo  $\log(s) \times \log(N(s))$ , onde, através de uma regressão linear, encontra-se a melhor reta que representa o conjunto de pontos. O coeficiente angular desta reta é a dimensão fractal do objeto em análise.

### 2.1.1.2 MÉTODO DA MASSA RAI0

De forma análoga à realizada com o Box Counting, o método para o cálculo da dimensão fractal conhecido como Massa Raio consiste num processo iterativo, onde, em cada iteração se sobrepõe à imagem - a qual deseja-se extrair a dimensão fractal – por alguma forma conhecida.

No método Box Counting utiliza-se uma malha de células, neste caso, utiliza-se um círculo, que, a cada iteração, aumenta o valor do seu raio.

Para cada valor distinto de raio associado ao círculo, avalia-se a quantidade de pontos, pertencentes a figura sob análise, contidos no interior deste círculo, de modo que este valor será a sua massa acumulada.

A partir deste princípio pode-se estabelecer uma relação para cada iteração, (BACKES; BRUNO, 2005)

$$M_r^i(A) = \mu r^D,$$

onde:

$M_r^i(A)$  é o número de pontos da figura  $A$  existentes no interior do círculo de raio  $r$  numa iteração  $i$ ;

$\mu$  é uma constante;

$r$  é o tamanho do raio do círculo;

$i$  indica a ordem cronológica em que a contagem é realizada;

$D$  é a dimensão fractal.

Assim, obtém-se a dimensão fractal ( $D$ ) como:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(M_r(A))}{\ln(r)} \right)$$

Em síntese, para calcular o valor da dimensão fractal ( $D$ ) de uma certa figura utiliza-se um gráfico do tipo  $\log x \log$  entre  $M_r^i(A)$  e  $r$ , de modo que, através de uma regressão linear obtém-se a reta que melhor ajusta os pontos, sendo o coeficiente angular desta reta a dimensão fractal.

Este método pode ser modificado, de modo a utilizar mais de um círculo para calcular a massa acumulada a cada iteração. Neste caso deve-se obter a média obtida pelos diversos círculos dispostos sobre a figura, e esta média, não o valor de

um círculo em especial, será o valor utilizado para a construção do gráfico mencionado. Além disto, ressalta-se que, embora haja mais de um círculo para cada iteração, estes compartilham, necessariamente, o mesmo valor de raio.

Os resultados obtidos por este método tendem a ser pouco significativos quando o centro do círculo, no caso de usar-se apenas um, está muito distante do centro da figura em análise, no caso em que se utiliza mais de um, este comportamento é amenizado (BACKES; BRUNO, 2005).

### **2.1.2 Dimensão fractal Multiescala (DFM)**

Os fractais são figuras idealizadas, inexistindo, no universo, qualquer objeto capaz de possuir as características necessárias para ser classificado como um.

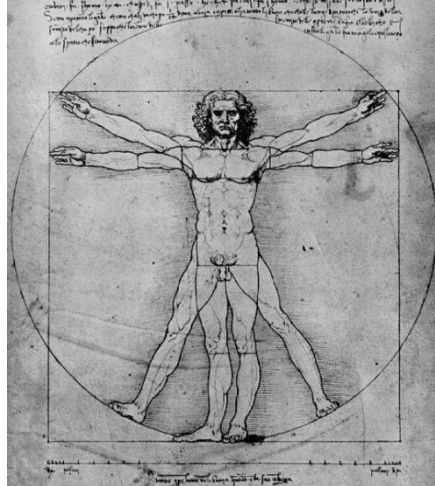
A auto-similaridade infinita, por exemplo, pode ser usada para demonstrar a distância entre o mundo “real”, ou o que é aceito como sendo o mundo “real” e o mundo idealizado, o qual os fractais fazem parte, uma vez que, esta característica implica na necessidade do objeto em questão ser infinito.

O que ocorre, em geral, é que existem casos em que as formas encontradas na natureza possuem algum nível de auto-similaridade, como é o caso do brócolis Figura 2.

Estes “pseudo-fractais”, como, muitas vezes, são chamados, acabam por fomentar acaloradas discussões acerca da proximidade entre os fenômenos encontrados na natureza, ou formas, de um modo mais específico, com os conceitos advindos da teoria dos fractais e da teoria do caos.

Alguns pesquisadores discorrem sobre a possibilidade da existência de um padrão, mesmo que caótico, no qual todo o universo está interligado e, onde, tudo que nele está contido obedece a uma regra de formação ou de comportamento.

Estas ideias fortalecem-se diante da aparente simetria encontrada no universo, como por exemplo, o fato da maioria dos animais possuir simetria bilateral, a simetria rotacional do sol, a simetria entre as cinco partes das estrelas do mar, as múltiplas simetrias encontradas entre as frutas e flores, entre outras tantas. Um exemplo destas simetrias pode ser visualizado na Figura 9.



**Figura9: O Homem Vitruviano: Exemplo de simetria entre as partes do corpo humano.**  
 Fonte: <http://www.misticismo.blogspot.com.br/>

Os seres vivos estão tão acostumados a este padrão que não o percebem de forma clara.

De fato, tudo que não parece simétrico, ou que julga-se estar fora de “ordem” gera certa angústia no observador como, se este soubesse, subconscientemente, que aquele fato, objeto, ou o que quer que seja não está seguindo o curso natural definido pela grande “ordem” do universo.

Tendo em vista todas estas constatações, fica claro o porquê de alguns pesquisadores utilizarem os conceitos da geometria fractal para o cálculo da dimensão de objetos não fractais como o que vem ocorrendo no processamento de imagens, afinal, existe um padrão mais simétrico e aparentemente de acordo com as regras definidas pelo universo do que o padrão fractal?

O conceito de dimensão fractal seção 2.1.1 em sua forma mais ampla, o da complexidade da forma, vem sendo utilizado para a categorização de formas não fractais com certo grau de êxito. Obviamente, estes estudos baseiam-se na idéia de que “objetos” de um mesmo grupo possuem formas semelhantes ou idênticas e, portanto, dimensões fractais semelhantes ou idênticas.

Em geral, quando se extrai a dimensão fractal de um objeto fractal com auto-similaridade exata tem-se que este valor será constante não importando a escala em que o objeto é observado, o que não se verifica em objetos não fractais.

Para estes casos a escala em que o objeto é observado é muito importante, pois esta pode revelar características diferentes sobre o objeto.

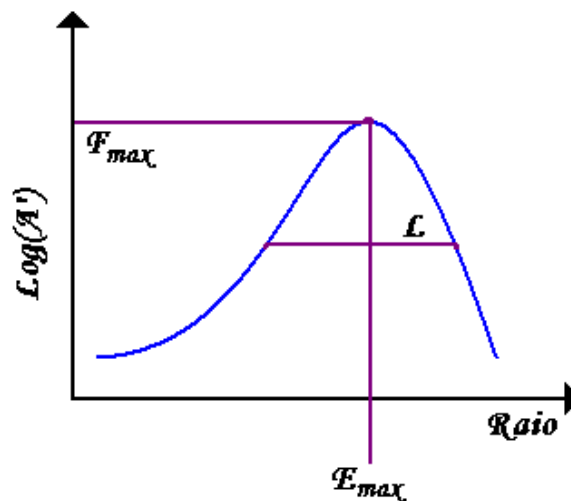
Tem-se que para este tipo de objeto quando a escala é aumentada tendendo ao infinito a dimensão fractal associada ao objeto tende a zero.

Deste modo a categorização de formas que é feita, usualmente, através de fractal utiliza-se de um recurso, a Dimensão Fractal Multiescala, que permite uma análise mais profunda sobre o objeto.

De um modo geral pode-se dizer que a Dimensão Fractal Multiescala não é um único valor escalar, como a Dimensão Fractal, mas sim uma abordagem diferente de análise que possibilita a extração de uma série de atributos importantes para a classificação da forma em observação como Pico de fractalidade ( $F_{max}$ ), Escala de máxima fractalidade ( $E_{max}$ ) e Largura de alta fractalidade ( $L$ ).

A análise Multiescalar da dimensão fractal, proposta por (COSTA; CESAR, 2000) possibilita a constatação da variação da dimensão fractal em diferentes escalas de observação para um mesmo objeto.

Em síntese, a abordagem proposta consiste na geração de um gráfico do tipo  $\log(r) \times \log(M')$  onde  $M'$  consiste no valor obtido quando se aplica a derivada no ponto  $(r, M(r))$  do gráfico bi-log resultante de qualquer método para extração de dimensão fractal.



**Figura10:** Gráfico de  $\log(A')$  x raio gerado sobre o método Massa Raio: Exemplo de curva de fractalidade, bem como localização dos atributos  $F_{max}$ , máxima fractalidade,  $E_{max}$ , Escala de máxima fractalidade e  $L$  largura de alta fractalidade. Fonte: Autoria própria.

Em geral, costuma-se utilizar o método de Minkowski em parceria com a abordagem Multiescala, uma vez que este método gera uma quantidade suficiente de pontos para que a curva de fractalidade possa ser observada de forma satisfatória no gráfico  $\log(r) \times \log(M')$ .

Neste trabalho usar-se-á a abordagem Multiescala para analisar a forma oriunda das órbitas de um subconjunto de pontos da bacia de atração de uma solução em um sistema de equações instável.

Os métodos utilizados em parceria com a abordagem Multiescala serão o Box-Counting e o Método da Massa Raio.

A escolha destes métodos e não o Minkowski para este tipo de análise fora feita devido ao fato de que ambos os métodos apresentam algum tipo de vantagem sobre o método em questão como visto em (PLOTZE; BRUNO; FALVO, 2003).

O Box-Counting pode ser executado muito rapidamente, podendo ser útil numa grande bateria de testes.

O método da Massa Raio, por sua vez tem grande qualidade em seus resultados com o empecilho de ser lento, mas, uma vez que este é, ainda, muito mais veloz que o método de Minkowski e produz resultados semelhantes optou-se pelo Massa Raio ao invés de Minkowski.

## 2.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES

### 2.2.1 Sistemas de Equações Lineares

Uma equação é considerada linear se for da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

onde:

$a_1, a_2, \dots, a_n$  são os escalares chamados de coeficientes que podem assumir valores reais ou complexos;

$x_1, x_2, \dots, x_n$  são as incógnitas da equação;

$b$  é o termo independente.

Uma solução particular para uma equação linear é uma  $n$ -uplas  $= \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ , cujas entradas  $s_j$  podem ser substituídas pelos  $x_j$  respectivos para  $j=1, \dots, n$  de modo que sua igualdade seja verdadeira.

O gráfico gerado por uma equação linear é uma linha reta, desta constatação provém o nome de “equação linear”.

Um sistema de equações lineares com  $m$  equações e  $n$  incógnitas é, geralmente, descrito na forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde:

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$  são os coeficientes;  
 $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as incógnitas;  
 $b_1, b_2, \dots, b_m$  são os termos independentes.

Uma solução particular para este tipo de sistema de equações lineares é um conjunto  $s = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  que satisfaz todas as equações do sistema simultaneamente.

No caso particular onde  $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$  diz-se que o sistema é homogêneo. Em notação matricial descreve-se um sistema de equações lineares na seguinte notação

$$Ax = b,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Os sistemas lineares possuem uma classificação segundo seu número de soluções, podendo ora possuir uma única solução, ora infinitas soluções, ou, ainda nenhuma solução. A classificação segundo (SPERANDIO; MENDES, 2003) é a que segue:

- **Possível ou Consistente e Determinado.** Neste caso o sistema apresenta uma única solução.
- **Possível ou Consistente e Indeterminado.** Neste caso o sistema possui infinitas soluções.
- **Impossível ou Inconsistente.** O sistema não admite solução.

Nos casos em que  $\det A = 0$ , o sistema é denominado como singular e tem infinitas soluções ou é inconsistente. Se  $\det A \neq 0$  então o sistema é dito regular (não singular) e tem solução única.

## 2.3 CONDICIONAMENTO

### 2.3.1 Norma Vetorial e Matricial

Entende-se por norma vetorial  $\|\cdot\|$  a função  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que associa um vetor  $X$  do espaço vetorial a um valor  $X$  em  $\mathbb{R}$ , não negativo, de modo a satisfazer os seguintes axiomas (JÚDICE; PATRÍCIO, 1996):

- I.  $\|\vec{x}\| \geq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ;
- II.  $\|\vec{x}\| = 0 \leftrightarrow \vec{x} = 0$ ;
- III.  $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ;
- IV.  $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

As normas mais utilizadas em análise numérica são definidas pelas expressões (CLAUDIO; MARINS, 2000, p. 58):

1.  $\|\vec{x}\|_1 = \sum_i^n |x_i|$  (Norma da Soma)
2.  $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_i^n |x_i|^2}$  (Norma Euclidiana)
3.  $\|\vec{x}\|_\infty = \text{MAX}_i |x_i|$  (Norma do Máximo)

Logo se  $\vec{x} = (-2, 1, 6)^t$  então suas respectivas normas são:

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\|_1 &= |-2| + |1| + |6| = 9 \\ \|\vec{x}\|_2 &= \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 6^2} = \sqrt{41} \cong 6.403 \\ \|\vec{x}\|_\infty &= 6\end{aligned}$$

A norma matricial  $\|\cdot\|$  é uma função de  $\mathbb{R}^{m \times n}$  em  $\mathbb{R}$  que satisfaz as condições, (JÚDICE; PATRÍCIO, 1996):

- I.  $\|A\| \geq 0, \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ;
- II.  $\|A\| = 0 \leftrightarrow A = 0$ ;
- III.  $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|, \forall \alpha \in \mathbb{R} \wedge \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ;
- IV.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge \forall B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

De forma análoga as normas vetoriais, também existem mais de uma forma de calcular a norma de uma matriz, sendo as mais usadas (CLAUDIO; MARINS, 2000, p. 58):

1.  $\|A\|_1 = \text{MAX}_{1 \leq j \leq n} (\sum_{i=1}^n |a_{ij}|)$  (Norma do Máximo das Colunas)
2.  $\|A\|_\infty = \text{MAX}_{1 \leq i \leq n} (\sum_{j=1}^n |a_{ij}|)$  (Norma do Máximo das Linhas)
3.  $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$  (Norma Euclidiana)



Dada uma matriz como a que segue:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Suas respectivas normas são:

$$\|A\|_1 = 17$$

$$\|A\|_\infty = 10$$

$$\|A\|_E = \sqrt{122} \cong 11,04$$

As normas matriciais possuem certa relação com as normas vetoriais, diz-se desta relação que as normas são compatíveis entre si. Deste pensamento advém que uma norma matricial  $\|\cdot\|'$  é compatível com uma norma vetorial  $\|\cdot\|$  se a desigualdade puder ser verificada, (JÚDICE; PATRÍCIO, 1996):

$$\|Ax\| \leq \|A\|' \cdot \|x\|$$

Desta forma tem-se que cada forma de extração da norma vetorial, Soma, Euclidiana e Máximo, é compatível com sua respectiva norma matricial:

$$\|Ax\|_1 \leq \|A\|_1 \cdot \|x\|_1$$

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|x\|_2$$

$$\|Ax\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|x\|_\infty$$

### 2.3.2 Condicionamento de uma Matriz

Dado um sistema de equações lineares  $A\vec{x} = \vec{y}$  e sua devida representação em máquina utilizando-se um sistema de ponto flutuante  $A^{\mathcal{F}}\vec{x}^{\mathcal{F}} = \vec{y}^{\mathcal{F}}$ , pode-se inferir que existirão casos em que  $A^{\mathcal{F}} \cong A$  e  $\vec{y}^{\mathcal{F}} \cong \vec{y}$  devido ao erro inerente do processo de transformação dos números pertencentes a  $\mathbb{R}$  para  $\mathcal{F}$  e, devido às operações realizadas durante o processo de solução e a perturbação dos dados iniciais  $\vec{x}^{\mathcal{F}} \cong \vec{x}$ .

De fato, é sabido que os elementos da matriz de coeficientes e do vetor independente de um sistema de equações lineares são, na grande maioria das aplicações, inexatos. Esta inexatidão origina-se, muitas vezes, porque os dados que alimentam o sistema são oriundos de experimentos, ou são computados através de operações que carregam erros de arredondamento ou, de forma mais abrangente, do próprio armazenamento dos elementos em uma aritmética finita.

Desta constatação nasce uma pergunta a ser respondida: Como esta perturbação, dos dados de entrada, se reflete no resultado?

A proposta da medida de condicionamento é realizar esta verificação “a priori”.

Esta medida pode ser entendida da seguinte forma: Seja o SELAA  $\vec{x} = \vec{y}$  cuja solução é dada pela fórmula  $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y}$  e uma perturbação em  $\vec{y}$  para  $\delta\vec{y}$ , então  $\vec{x}$  deve, necessariamente, adequar-se a perturbação de modo que seu valor seja  $\delta\vec{x}$ , onde:

$$\delta\vec{x} = A^{-1} \cdot \delta\vec{y}$$

Como se deseja saber qual a modificação que sofreu o vetor solução  $\vec{x}$ , dada a perturbação  $\delta\vec{y}$ , tem-se:

$$\vec{y} - \delta\vec{y} = A \cdot \vec{x} - A \cdot \delta\vec{x},$$

ou seja,

$$\vec{y} - \delta\vec{y} = A^{-1} \cdot (\vec{x} - \delta\vec{x})$$

$$(\vec{x} - \delta\vec{x}) = A^{-1} \cdot (\vec{y} - \delta\vec{y})$$

Aplicando-se  $\|\cdot\|_v$  como notação para a norma vetorial e  $\|\cdot\|_m$  como notação para a norma matricial, caso haja compatibilidade entre as normas matricial e vetorial do sistema evolui-se para:

$$(01) \quad \|\vec{x} - \delta\vec{x}\|_v = \|A^{-1} \cdot (\vec{y} - \delta\vec{y})\|_v \leq \|A^{-1}\|_m \cdot \|\vec{y} - \delta\vec{y}\|_v \text{ ou}$$

$$\|\vec{x} - \delta\vec{x}\|_v \leq \|A^{-1}\|_m \cdot \|\vec{y} - \delta\vec{y}\|_v$$

Dividindo todos os termos por  $\|\vec{x}\|_v$ :

$$\frac{\|\vec{x} - \delta\vec{x}\|_v}{\|\vec{x}\|_v} \leq \frac{\|A^{-1}\|_m}{\|\vec{x}\|_v} \cdot \|\vec{y} - \delta\vec{y}\|_v = \|A^{-1}\|_m \cdot \frac{1}{\|\vec{x}\|_v} \cdot \|\vec{y} - \delta\vec{y}\|_v$$

Sendo  $\vec{y} = A\vec{x}$ , tem-se:

$$(02) \quad \|\vec{y}\|_v \leq \|A\|_m \cdot \|\vec{x}\|_v$$

$$\frac{1}{\|\vec{x}\|_v} \leq \frac{\|A\|_m}{\|\vec{y}\|_v}$$

Aplicando-se (01) com (02) tem-se:

$$\frac{\|\vec{x} - \delta\vec{x}\|_v}{\|\vec{x}\|_v} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\vec{y} - \delta\vec{y}\|_v}{\|\vec{y}\|_v},$$

onde:

$\frac{\|\vec{x} - \delta\vec{x}\|_v}{\|\vec{x}\|_v}$  é o valor relativo provocado pela perturbação  $\delta$  ao vetor independente  $\vec{y}$  no vetor solução  $\vec{x}$ ,

$\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$  é o fator de ampliação do sistema,

$\frac{\|\vec{y} - \delta\vec{y}\|_v}{\|\vec{y}\|_v}$  é o valor relativo de perturbação feita no sistema  $A\vec{x} = \vec{y}$ .

Então, o condicionamento do sistema  $A\vec{x} = \vec{y}$  é calculado por:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Sendo que, quanto maior for o valor associado ao  $\text{cond}(A)$ , mais sensível será o sistema a qualquer tipo de perturbação.

Esta definição e processo de expansão do problema foram construídos tendo como base um trecho do livro *Cálculo Numérico Computacional: Teoria e Prática* (CLAUDIO; MARINS, 2000, p. 62).

## 2.4 MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Em análise numérica existem duas classes de métodos distintos que podem ser utilizadas quando o objetivo é a resolução de um sistema de equações, métodos diretos e métodos iterativos.

Um método é dito direto quando a solução exata  $\vec{x}$  é obtida realizando-se um número finito de operações aritméticas em  $\mathbb{R}$  (isto é, em precisão infinita) (CLAUDIO; MARINS, 2000, p. 62). Alguns exemplos de métodos desta classe são o método de Gauss e o método de Gauss com pivotamento.

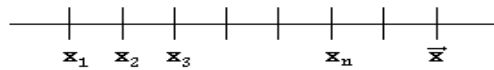
Um método é dito iterativo se, através de uma sequência de aproximações  $\{\vec{x}^k\}$  obtém-se um valor  $\vec{x}^k$  que satisfaz os critérios de parada definidos antes da execução do método.

Os critérios de parada são utilizados juntamente com os métodos iterativos, de modo a impedir que estes sejam executados *ad infinitum*, uma vez que, por definição, o processo iterativo assim permite.

O critério de parada é uma composição da exatidão e do número de iterações, de modo a calibrar a qualidade da resposta através da definição do valor da exatidão e delimitar o tempo de geração da sequência iterativa.

Segundo (CLAUDIO; MARINS, 2000, p. 62):

Um método é dito iterativo (*iteratio* vem do grego e quer dizer repetição) quando a solução  $\vec{x}$  é obtida como limite de uma sequência de aproximações sucessivas  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots$



$$\bar{x} = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j$$

Quando métodos numéricos são utilizados em computador, que é uma máquina com precisão finita, se deve atentar ao fato de que o erro de arredondamento inerente à aritmética de ponto flutuante influenciará nos resultados. Deste modo, a exatidão dos valores obtidos pode estar muito aquém dos esperados quando resolvidos em precisão infinita e, neste ponto, os métodos diretos, devido a sua natureza, não dispõem de algum mecanismo para controlar o erro propagado durante o processo de solução.

Os métodos iterativos, embora sujeitos aos mesmos tipos de erros que os métodos diretos dispõem de mecanismos para controlar a propagação do erro durante o processo de solução.

## 2.4.1 Resolução Numérica de Sistemas Lineares

### 2.4.1.1 MÉTODO DE GAUSS-JACOBI

Supondo que  $a_{ii} \neq 0$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ , o método de Jacobi consiste em reescrever um sistema de equações tendo  $m = n$  através da forma iterativa dada por:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k \geq 0.$$

Onde a cada iteração  $k+1$ , estima-se um novo valor para a solução calculada na iteração  $k$ . Sendo  $\mathbf{X}^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]^T$  o vetor de chutes iniciais e  $\{\mathbf{X}^{(k+1)}\}$  a sequência de aproximações para a solução ideal  $X$  calculadas pelo processo iterativo.

### 2.4.1.2 MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

Semelhante ao método de Jacobi o método de Gauss-Seidel consiste na sequência iterativa definida como:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k \geq 0.$$

Sendo  $X^{(0)}$  o vetor de chutes iniciais e  $\{X^{(k+1)}\}$  a sequência de valores aproximados calculados pelo método iterativo.

É importante ressaltar que, no método de Jacobi, o conjunto de valores associados ao vetor  $X^{(k+1)}$  é calculado usando-se, apenas, os componentes de  $X^k$ .

Segundo (SPERANDIO; MENDES; SILVA, 2003) o método de Gauss-Seidel utiliza-se de valores, tanto de  $X^{(k+1)}$ , quanto de  $X^{(k)}$  para o cálculo dos valores de  $X^{(k+1)}$ , deste modo, em geral, este método converge para uma solução em menos iterações que o de Jacobi.

### 3 ESPECIFICAÇÃO DO PROJETO

Esta seção descreve as ações planejadas e realizadas para atingir os objetivos deste trabalho de conclusão, a saber:

- Elaboração de um modelo para a visualização do condicionamento de sistemas de equações baseado em fractais.
- Desenvolvimento de uma ferramenta computacional para exibir os dados gerados pelo modelo de visualização.

A seguir estas ações são descritas detalhadamente.

#### 3.1 Modelagem Matemática da Solução do Problema

Esta seção contempla a descrição do modelo idealizado, bem como, a trajetória sobre as diferentes especulações articuladas no decorrer deste trabalho e que acabaram por convergir no modelo proposto.

Em princípio, este trabalho estava restrito aos sistemas não lineares, pois a ideia fundamental era a de que sistemas deste tipo podem ser classificados como sistemas “caóticos” que, dependendo da entrada, produzem valores totalmente aleatórios e imprevisíveis. Logicamente, a característica que se ressalta neste contexto é, justamente, a sensibilidade aos dados iniciais, de modo que, estes configuram sistemas instáveis.

Este tipo de comportamento “caótico” foi verificado por Edward Lorenz durante um de seus diversos experimentos meteorológicos, o qual originou o termo “efeito borboleta”.

Lorenz ficara curioso quanto ao “atrator” de seu sistema que revelou-se, para sua surpresa, uma figura estranha, a qual não conseguira definir a forma exata, o que lhe rendeu o nome de “atrator estranho de Lorenz”. O atrator de Lorenz é classificado como uma figura fractal.

Embora sistemas lineares também possam ser considerados caóticos, optou-se, em primeira instância, por manter-se o foco em sistemas não lineares, pois especulava-se que o “atrator” destes sistemas fosse um “atrator” estranho e, portanto, um fractal.

Alguns conceitos tratados acima, ou que, em decorrência destes, se fazem importantes, como o conceito de “atrator”, carecem de maior atenção e, por esta razão, antes de seguir o percurso programado para esta seção será feito um breve esclarecimento sobre estes conceitos.

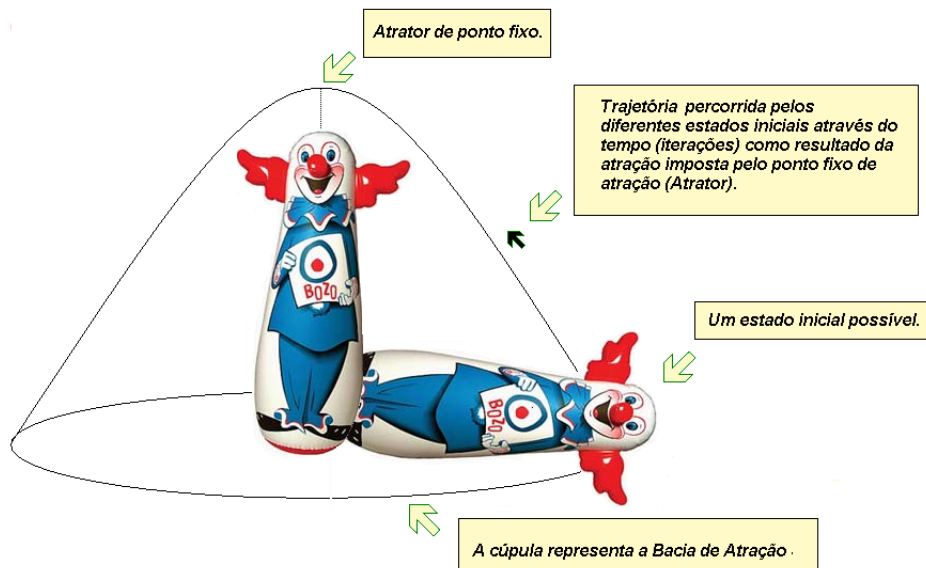
- **Atrator:** Um atrator é um conjunto de estados que configura o comportamento para o qual um sistema dinâmico evolui independente do estado inicial.

Existem vários tipos de atrator, sendo os mais comuns o atrator de ponto fixo, o atrator periódico e o atrator estranho.

Um sistema pode possuir nenhum, um ou mais de um atrator ao mesmo tempo e de tipos diferentes dependendo da complexidade do problema.

Um exemplo, onde este conceito é bastante nítido, é o caso do brinquedo infantil “João Teimoso” (Figura 11). Basicamente, um “João Teimoso” é um brinquedo cuja base comporta uma esfera de metal, ou algum outro material denso qualquer, preenchida com areia, de modo que, o restante do corpo, é muito mais leve do que a base. Deste modo o brinquedo sempre tende a voltar para o estado em que está de pé.

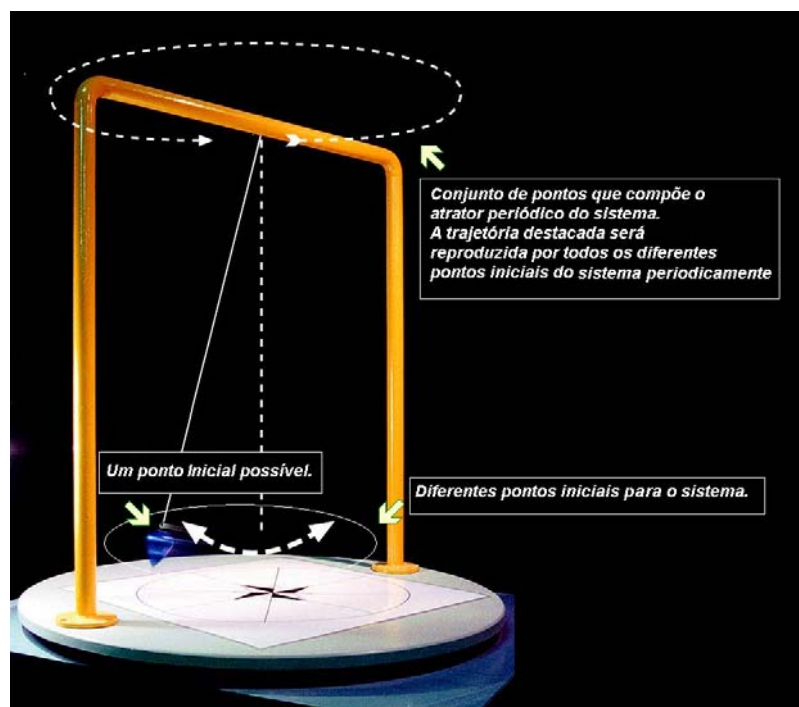
Pois bem, se o estado em que o “João Teimoso” está de pé for considerado como estado final para qualquer posição em que se deite o brinquedo, então, cada posição é um diferente estado inicial, ou ponto em potencial no espaço de fase, que de alguma forma é “atraído” para o estado final em um certo número de iterações – diz-se destes estados que pertencem a “Bacia” de atração do atrator - onde o ponto de equilíbrio do sistema se estabelece. Um atrator deste tipo é um atrator de ponto fixo.



**Figura 11: João Teimoso: Exemplo de atrator de ponto fixo. O João teimoso, visto como um sistema dinâmico que evolui para um estado final único independente do estado inicial.**

Fonte: <http://bloda.wordpress.com/2007/09/29/brinquedos-de-sabado-bozo-teimoso/>; Editada.

Um atrator do tipo periódico é verificado nas trajetórias cíclicas e oscilatórias de um pêndulo (Figura 12) onde a trajetória do pêndulo tenderá para àquela cuja oscilação possui um período constante, neste caso o atrator seria o conjunto de pontos que compõe a trajetória repetida pelo sistema indefinidamente.

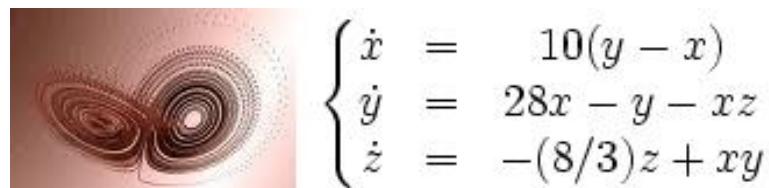


**Figura 12: O pêndulo: Exemplo de atrator periódico. O pêndulo, visto como um sistema dinâmico que evolui para uma trajetória, ou conjunto de pontos independente do estado inicial.**

Fonte: <http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0222-02/mecanica6.htm>; Editada.



O conceito de atrator estranho (Figura 13) é um pouco mais complexo, uma vez que o sistema é atraído ao mesmo tempo que, também, é repellido. Ressalta-se que, embora o sistema perfaça uma trajetória em torno de si mesmo, esta não é uma trajetória que pode ser prevista, uma vez que o seu comportamento não é nem aleatório, nem fixo, nem oscilatório, mas sim uma flutuação caótica onde este se dobra infinitas vezes dentro de si sendo que nenhum estado já visitado incorrerá de o ser mais de uma vez.



**Figura 13: Atrator Estranho com equações diferenciais: exemplo de atrator estranho. As equações de Lorenz (à direita) compõe um sistema dinâmico que é atraído por um atrator estranho trifásico (à esquerda).**

Fonte: [http://moritvritesalvtant.blogspot.com/\(Atrator\);](http://moritvritesalvtant.blogspot.com/(Atrator);)  
[http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria\\_do\\_caos\(Equações\).](http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_do_caos(Equações).)

- **Espaço de Fase:** Entende-se por espaço de fase, em dinâmica Não Linear, o espaço abstrato cuja dimensão é definida pelo número de variáveis do sistema e onde o comportamento deste pode ser verificado. Através do espaço de fase é possível realizar uma análise qualitativa do sistema como um todo, de modo que, o enfoque desta abordagem não é o de uma única órbita (trajetória), ou evolução de um ponto único pelo sistema, mas o conjunto de todas as órbitas ou possíveis evoluções para os infinitos pontos contidos no espaço.
- **Sistema caótico:** Entende-se como sistema caótico o sistema cuja(s) solução(ões) são imprevisíveis ou de extrema sensibilidade aos dados iniciais, tal conceito é bem representado pelo termo “Efeito Borboleta”.
- **Sistemas Dinâmicos:** Tratam-se de sistemas formados por equações que especificam como as variáveis evoluem com o tempo. Cada equação especifica como os novos valores para as variáveis devem ser calculados, usando uma função com os seus valores correntes e parâmetros de controle.

Partindo-se da idéia de que os sistemas não lineares estavam sujeitos ao caos – sensibilidade aos dados iniciais – e que, em geral, os atratores deste tipo de sistema são figuras fractais, pretendia-se, inicialmente, estudar a possibilidade de se associar o conceito de dimensão fractal seção 2.1.1 com a medida de instabilidade do sistema seção 2.3. Tal relação baseava-se na ideia de que a norma informa um valor escalar que representa a sensibilidade aos dados iniciais, mas não representa como o sistema evolui dado a sua “instabilidade” ou “estabilidade”. Neste ponto o conceito de atrator supriria esta necessidade, uma vez que este representa como o sistema evolui para as suas soluções, ou seja, o atrator poderia ser utilizado para representa como o mal condicionamento do problema influi no processo de convergência do método que se utiliza. Através da análise da dimensão fractal do atrator do sistema especulava-se que, quanto maior a sua dimensão fractal mais instável seria o sistema a este associado.

Forapossível observar, através do estudo realizado, alguns empecilhos inerentes a esta abordagem. Constatou-se que, nem todo sistema possui um “atrator”, de fato, até mesmo para sistemas de equações não lineares existem casos em que o sistema não tem solução, logo não possui atrator.

Além dos casos em que não havia atrator descobriu-se que, nem todo atrator de sistemas não lineares é, necessariamente, um atrator estranho, e, de fato, em geral, não o é. Tal constatação seria péssima para a evolução do trabalho não fosse a descoberta de que existem atratores que são fractais mas não são “estranhos”- até este ponto acreditava-se que apenas os atratores estranhos configuravam figuras fractais.

Depois de algum tempo de estudo surgiu uma nova idéia fundamentada no artigo *Sistemas Não Lineares e Fractais*, onde o autor Lúcio Tunes dos Santos propõe uma visualização gráfica das áreas de convergência para sistemas não lineares de dimensão 2 (SANTOS, 1993).

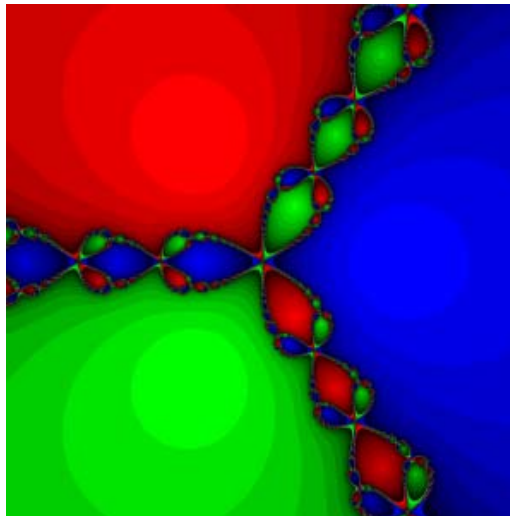
Os resultados obtidos pelo autor do artigo foram, em resumo, gráficos que continham fractais entre as áreas de atração dos diferentes atratores do sistema, mas as conclusões especuladas pelo autor nada inferiam sobre uma possível relação entre estas “bordas fractais” e a instabilidade do sistema.

De forma simplória, pode-se inferir que para cada solução particular de um sistema não linear deve existir um atrator.

Cada atrator possui, por sua vez, uma bacia de atração – conjunto de pontos que são atraídos por este atrator – de modo que a pergunta a ser respondida é: Uma vez que o sistema não linear em análise possua mais de uma solução possível, então para qual destas soluções o sistema convergirá dado um chute inicial ?.

Em geral, a resposta parece óbvia, para a solução mais próxima, mas isto nem sempre é verificado, o que, nos leva a outras dúvidas relativas ao porque disto ocorrer.

No artigo mencionado é visível um comportamento, ou padrão, que se manifesta, somente, quando o ponto está exatamente no limite entre duas áreas de atração distintas. Deste modo infere-se que existem atratores não estranhos que manifestam algum padrão fractal, neste caso as bordas entre as bacias de atração geram um fractal como visível na Figura 14. Infelizmente as figuras do artigo não puderam ser extraídas para serem usadas como exemplo, mas a Figura 14 contempla o mesmo princípio.



**Figura 14: Newton Fractal: visualização gráfica do método Newton Fractal para um sistema com três soluções. As bordas fractais existentes entre as bacias de atração das diferentes soluções, cada uma representada por uma cor distinta, podem ser observadas.**

Fonte: <http://willandmegha.wordpress.com/category/uncategorized/>.

A partir daí estudou-se a possibilidade de associar esta borda fractal ao condicionamento do problema que a gerou de forma análoga ao que seria feito com os atratores estranhos.

O problema que fora detectado nesta abordagem é que, dada a imagem gerada pelo processo iterativo (Figura 14) não é possível extrair o padrão fractal nela contida de forma rápida, uma vez que, se desconhece totalmente o padrão fractal da imagem tendo de se recorrer a métodos que produzem heurísticas e, ou, demandam

uma grande quantidade de operações para obter resultados satisfatórios, alta complexidade.

O motivo pelo qual se deseja extrair apenas o fractal da imagem, embora óbvio, surge da necessidade de se agregar a este fractal, uma dimensão fractal e com ela inferir alguma relação com a norma do problema.

Para evitar a necessidade de realizar a implementação de algoritmos para reconhecimento de padrões em imagens, optou-se por desenvolver outra abordagem: categorização de formas através da dimensão fractal.

A dimensão fractal vem sendo utilizada, com êxito, como “categorizadora” de formas em alguns trabalhos acadêmicos, como visto em (SEDIVY et. al, 1999) e (PLOTZE; BRUNO; FALVO, 2003).

Nestes experimentos, em geral, existem formas não fractais, as quais se associa uma dimensão fractal. A ideia por detrás desta associação é a de que o objeto em estudo sempre terá um valor em dimensão fractal semelhante para todos os objetos daquele “tipo”, “classe”, ou “categoria”. É possível, por exemplo, através deste pensamento, dizer que a dimensão fractal dos núcleos de uma célula específica do corpo humano é, em média  $x_{df}$ , sendo que qualquer célula deste tipo que possua um valor de dimensão fractal muito distinto do especificado pode ser considerada como atípica, podendo, possivelmente, ser uma célula danificada ou defeituosa, uma vez que destoa da dimensão fractal média dos membros da mesma classe.

No contexto deste trabalho a categorização idealizada pode ser expressa pela primeira lei da geografia, de acordo com Waldo Tobler: *“Everything is related to everything else, but near things are more related than distant things”* (TOBLER, 1970).

Basicamente, a ideia é a de que, dado um sistema qualquer, sua instabilidade, referida pela norma, deve influenciar no comportamento da obtenção da solução do sistema e, portanto, sistemas com norma semelhantes devem possuir comportamentos semelhantes, sendo possível associar ou categorizar a “forma” gerada pela série histórica da sequência de aproximações da solução com o condicionamento do sistema.

Deste modo, tem-se que a dimensão fractal de sistemas com uma condição qualquer  $y$  deve ser próxima da média da dimensão fractal dos membros deste grupo – o grupo de condição  $y$ .

A modelagem proposta, embasada nos conceitos apresentados ao longo deste trabalho, consiste na construção de um gráfico que contempla a junção ou sobreposição de uma série de gráficos (Figura 15) – um para cada perturbação realizada sobre o sistema (Figura 16), de modo a visualizar o comportamento da instabilidade do problema em relação ao tempo (iterações) e a sua perturbação – de modo que a figura gerada neste gráfico seja associada a uma dimensão fractal.

Especula-se que, quanto maior for a complexidade fractal, ou dimensão fractal desta figura mais instável será o problema, uma vez que esta figura representará a evolução do processo de solução do sistema.

Neste ponto das investigações optou-se por utilizar sistemas lineares, uma vez que estes também estão sujeitos a sensibilidade aos dados iniciais, mas diferentemente, dos sistemas não lineares, podem possuir, apenas, uma solução, nenhuma solução ou infinitas soluções (matriz singular).

Está opção se justifica quando atenta-se ao fato de que, o número de operações realizadas sobre o sistema para gerar o gráfico final e a complexidade da forma gerada serão muito maiores em sistema não lineares.

Como se está especulando uma relação e pode ser possível que esta inexista, a estratégia adotada será validar o modelo para os sistemas lineares, que são mais simples, e, caso esta relação seja verificada expandi-la para os sistemas não lineares.

O caso particular em que se manterá o enfoque, inicialmente, será o de sistemas lineares instáveis que possuam apenas uma solução e cuja matriz seja do tipo  $2 \times 2$ , por esta razão utilizar-se-á sistemas disponíveis em dois repositórios disponíveis na internet:

*“<http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/>”*

*“<http://web.comlab.ox.ac.uk/projects/pseudospectra/index.html>”*

Estas bases reúnem sistemas instáveis.

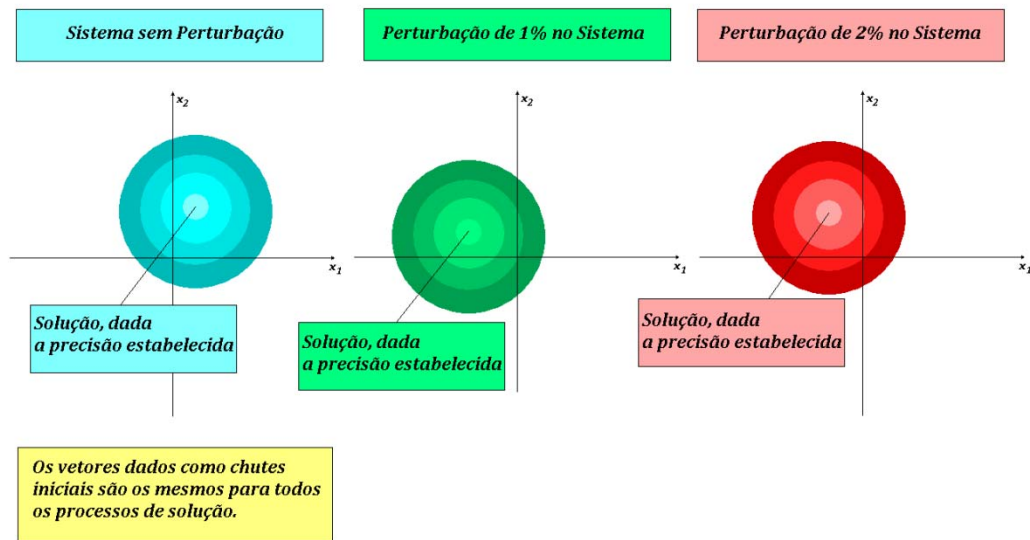
Uma vez definida a modelagem conceitual da representação gráfica do modelo, partiu-se para o projeto da visualização desta representação.

Os argumentos de entrada do procedimento são: o sistema linear  $A\vec{x} = \vec{y}$  do tipo  $n \times n$  com  $n = 2$  e com  $\vec{x}^t = [x_1, x_2]$ , sabidamente instável; um valor para  $M$  (número máximo de iterações) e  $\epsilon$  (exatidão mínima requerida), sendo  $\epsilon > 0$

O procedimento realiza as seguintes ações:

1. Calcula a medida de instabilidade do sistema (norma).

2. Resolve o sistema utilizando algum método iterativo dentre aqueles descritos na seção 4.1.
3. Associa uma cor ao processo de solução vigente, sendo que será associada uma cor para cada perturbação gerada no sistema original.
4. Gera um gráfico do tipo  $x_1 \times x_2$ , onde, para cada  $\vec{x}^k$  calculado, com  $k \leq M$ , se  $\|\vec{x}^k - x^*\| < \varepsilon$ , sendo  $x^*$  a solução exata do sistema, então associa-se ao valor calculado a cor escolhida para a solução vigente e se executa um degradê na cor, alterando a tonalidade através da iteração em que o resultado fora calculado. Caso a desigualdade não seja verificada, associa-se um valor diferente de cor ao resultado. Esta cor deve ser única para todos os diferentes processos de solução. Quanto maior o valor de  $k$ , mais próxima será a sua tonalidade, da cor original (Figura 15). A Figura 15 foi gerada para representar o modelo, utilizando-se duas perturbações no sistema original.



**Figura 15: Gráficos de Atração: visualização de 3 gráficos resultantes da aplicação de um método iterativo qualquer para um sistema linear com uma única solução.**

Fonte: Autoria própria.

5. Gera um gráfico para visualizar a série de valores, obtida através das iteração, associada aos diferentes valores iniciais (Figura 16).



**Figura 16: Gráfico de Junção: visualização do gráfico de junção de todas as soluções em um espaço bidimensional. Este gráfico é idealizado como a figura que contempla a evolução da instabilidade em função das perturbações realizadas, através do tempo (iterações).**

Fonte: Autoria própria.

OBS: No gráfico apresentado na Figura 16, quando um ponto qualquer no espaço bidimensional encontra-se presente em mais de uma sequência iterativa (órbita) de um sistema sua visualização é prejudicada, uma vez que apenas a última órbita que possuir o ponto citado irá lhe atribuir alguma cor. Para transpor esta deficiência quando o processo de pintura dos pontos do gráfico é efetuado é verificado se o ponto a ser pintado já possui alguma cor, caso em que outra órbita também gerou aquele ponto, a partir daí a cor é alterada pela soma dos componentes *RGB* das órbitas que o atingiram, lembrando que a cor que as órbitas atribuem aos pontos é definida pela raiz, para a qual, a órbita convergiu. Deste modo tem-se que a interpretação deste gráfico é a de que, quanto mais áreas compartilhadas entre as diferentes soluções houverem, menos instável será o problema.

6. Calcula a dimensão fractal da figura gerada no passo 5 (Figura 16) através de uma das técnicas especificadas na seção 2.1.1 ou 2.1.2. A estratégia para calcular a dimensão fractal será a transposição da forma vista na Figura 16 em três dimensões, sendo  $k$  o componente associado à terceira dimensão.
7. Gera um gráfico do tipo *norma versus dimensão fractal*.

Após o sétimo passo, o modelo poderá ser analisado com mais detalhe, de modo que, será possível prosseguir com as investigações acerca da relação entre a dimensão fractal associada à resolução do sistema e a sua instabilidade (a medida de instabilidade sendo utilizada é a norma euclidiana).

Uma vez que os resultados sejam satisfatórios para os sistemas lineares ampliar-se-á este conceito aos sistemas não lineares.

### 3.1.1 Análise e ajustes no Modelo Matemático

Essa seção tem por finalidade descrever os ajustes que foram feitos sobre o modelo idealizado em no Trabalho de Conclusão I (TCI) e explicar por que esses ajustes foram necessários.

O modelo inicial havia sido construído sobre a ideia de que um sistema estável qualquer  $s$ , ao ser perturbado, sofreria pouco impacto dessa modificação em seu processo de solução e o mesmo não seria verificado em sistemas instáveis. Deste modo, caso dispuséssemos as diferentes sequências iterativas do sistema  $s$  e o sistema perturbado  $\sigma$  em um mesmo gráfico, poderíamos observar que o comportamento geral de suas sequências iterativas seria quase o mesmo enquanto que em sistemas instáveis o comportamento das sequências tenderia ao caos, havendo pouca semelhança entre  $s$  e  $\sigma$ .

Embora o modelo não estivesse totalmente equivocado, esboços iniciais dos gráficos e de um estudo mais aprofundado sobre os comportamentos visualizados indicavam que essa abordagem necessitava de alguns ajustes. O conceito por detrás deste ajuste baseia-se no fato de que em um sistema estável a propagação da perturbação é diretamente proporcional no resultado, ou seja, uma perturbação de 1% sobre os dados iniciais produz uma perturbação de 1% nos resultados finais, porém não se pode supor que a perturbação se mantenha constante durante a obtenção da sequência de valores (gerados pela aplicação do método iterativo) que aproxima o resultado.

O gráfico foi ajustado para não sobrepor os gráficos dos sistemas, mas sim examiná-los em separado, uma vez que, embora os resultados finais sejam semelhantes entre o sistema original e o sistema perturbado (em sistemas estáveis), a forma como as órbitas convergiram para a solução, para os dois sistemas, poderia não apresentar tanta similaridade.

A ideia norteadora da nova modelagem conceitual parte do pressuposto de que todo sistema resolvido por um método numérico iterativo passa a configurar um



sistema dinâmico, uma vez que cada ponto da sequência iterativa é calculado levando-se em conta o ponto anterior.

Deste modo tem-se que o sistema evolui no domínio do tempo (iterações) através da interação entre os valores previamente calculados (realimentação), ou seja, a cada iteração é calculado um valor que servirá de entrada para o cálculo do próximo estipulando assim uma dependência entre o estado futuro e seus estados passados (valores anteriores da sequência iterativa).

Algumas conjecturas podem ser elaboradas a partir do pressuposto acima.

Primeiramente, é possível observar que na medida em que se determinam valores iniciais, estes produzem sequências iterativas que ora convergem e ora oscilam sem nunca convergir.

Tem-se, que das infinitas possibilidades de valores iniciais que produzem sequências iterativas, para um certo sistema, todas as que convergem são “atraídas” pela raiz e todas as que oscilam sem nunca convergir são “atraídas” pelos demais pontos do espaço. Este é, justamente, o conceito de um atrator em um sistema dinâmico.

Para a modelagem desenvolvida tem-se que as raízes são atratores de ponto fixo e para fins de simplificação todos os valores que não forem “atraídos” pela raiz (sequências não convergentes) são atraídos pelo “atrator do infinito”.

O conjunto de todos os valores cuja sequência iterativa (órbita) é atraída para o atrator configura a sua bacia de atração.

No contexto de sistemas de equações cada ponto (valores distintos de  $x$  e  $y$  calculados pelo método numérico) pertencente a uma órbita convergente também pertence a bacia de atração deste atrator e, portanto, caso este seja utilizado como valor inicial irá produzir uma órbita igualmente convergente.

Deste modo tem-se que a forma da bacia de atração das raízes de um sistema delimita a zona de alcance de sua convergência e que cada sequência convergente especifica como seus pontos integrantes interagem entre si e evoluem no processo de solução.

Para a visualização da instabilidade no processo de solução utiliza-se um gráfico que contém algumas das sequências iterativas que convergem para a solução, ou seja, é um subconjunto de todas as órbitas (sequências iterativas) contidas na bacia de atração da raiz do sistema.

Cada ponto neste gráfico contempla os valores calculados pelo método iterativo e sua respectiva iteração. Um possível ponto para um sistema linear com duas variáveis seria  $p(1, 2, 3)$ , onde 1 seria o valor calculado para a primeira variável do sistema, eixo das abscissas ( $x$ ), 2 o valor calculado para a segunda variável do sistema, eixo das ordenadas ( $y$ ) e 3 seria o número que corresponde a iteração na qual os valores do par  $(x, y)$  foram calculados.

Com este gráfico é possível visualizar como as diferentes órbitas evoluem através do domínio do tempo (iterações) e quais relações se estabelecem entre seus pontos à medida que são atraídas para a solução.

Nota-se que existe um padrão para estas relações, tal padrão pode ser descrito como sendo a “forma” como o sistema evolui dentro da bacia de atração do atrator e, portanto, é possível verificar como a instabilidade interfere no processo de solução deste sistema.

A interpretação deste gráfico é a de que quanto mais densa, em número de pontos, mais iterações são necessárias para a convergência do método aplicado sobre o sistema, uma vez que um número maior de pontos implica num número maior de relações ou dependências entre os diversos pontos das sequências convergentes.

O número de órbitas utilizadas nos experimentos são restritas a um número computacionalmente viável, posto que o número existente é muito grande senão infinito.

Tem-se que a restrição no número de órbitas não altera a “forma” que é extraída das relações entre os pontos das sequências iterativas contidas na bacia, embora hajam alguns pontos faltantes.

Isto é possível dada à constatação de que as órbitas atraídas pelo mesmo atrator possuem comportamentos semelhantes (SERRA, 1997), portanto é possível ter uma ideia geral de como as demais órbitas se comportam.

Ao demonstrar as relações que ocorrem dentro da bacia de atração da raiz de um sistema através do gráfico citado, é possível explorar visualmente como a instabilidade afeta o processo de solução.

Utiliza-se o conceito de dimensão fractal para representar a complexidade da forma visualizada, numa tentativa de averiguar, se existe, um padrão para a instabilidade, de modo que se possa inferir se sistemas com normas semelhantes

apresentam comportamentos semelhantes, ou seja, são afetados da mesma forma pela instabilidade.

Como a dimensão fractal representa a complexidade da “forma” que se estabelece nas bacias de convergência de cada sistema, esta acaba servindo como uma espécie de “assinatura” para aquele sistema, daí advém o termo assinatura fractal.

### 3.2 Projeto de Ambiente para Exploração Visual da Modelagem Matemática

Dentre os objetivos propostos neste trabalho encontra-se o desenvolvimento de um ambiente computacional onde seja possível explorar visualmente a modelagem matemática elaborada.

Esta seção contempla o projeto idealizado em TCI que, juntamente com a seção 3.3, descrevem a aplicação que fora idealizada e como ela fora implementada.

O projeto descrevia a linguagem de programação orientada a objetos Java como a escolhida para a construção da aplicação – via browser.

O protótipo da tela inicial do ambiente pode ser visualizada na Figura 17.

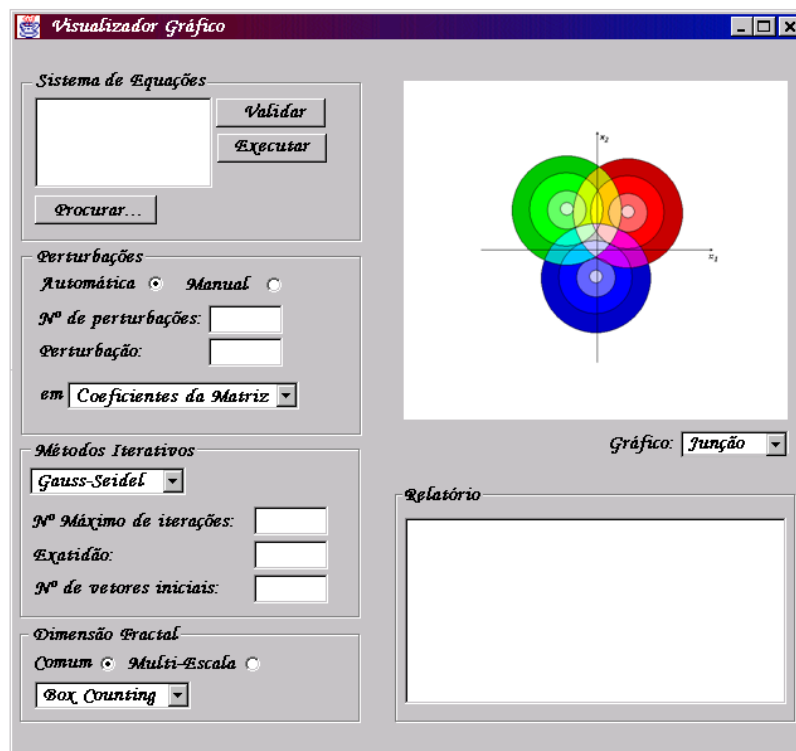


Figura 17: Ambiente: um protótipo de tela para o ambiente de exploração da modelagem matemática

Fonte: Autoria própria.

O ambiente possibilita a construção de diversos cenários por meio de suas opções. É possível escolher o método iterativo utilizado, o método usado para o cálculo da dimensão fractal, o número de vetores iniciais utilizados, ou seja, quantas vezes cada ciclo de execução será executado para cada instância de, entre outras variáveis de controle como número máximo de iterações para o método numérico, exatidão requerida, entre outras(Figura 17).

Além da escolha do cenário que será utilizado é possível obter informações detalhadas sobre o processo de solução bastando navegar através dos gráficos selecionáveis na opção “Gráfico”.

A área destinada aos relatórios de acompanhamento, denominada “Relatório”, apresenta o contexto do gráfico da exibição, descrevendo o valor das variáveis apresentadas no gráfico, bem como informações sobre algum tipo de erro que possa ter ocorrido e, sempre que possível, a solução adotada para correção do erro.

As opções de gráficos idealizados para a aplicação são ilustradas pelas figuras 15 e 16.

O “applet” Java deveria oferecer opções automáticas para diminuir o esforço, por parte do usuário, para inserir pequenas perturbações no sistema em estudo.

Os sistemas informados para o ambiente devem observar o seguinte formato:

$\langle N \rangle \Rightarrow \langle R \rangle :$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle a_{11} \rangle \langle * \rangle \langle x_{11} \rangle \langle op \rangle \langle a_{12} \rangle \langle * \rangle \langle x_{12} \rangle \dots \langle op \rangle \langle a_{1n} \rangle \langle * \rangle \langle x_{1n} \rangle = \langle b_1 \rangle \\ \langle a_{21} \rangle \langle * \rangle \langle x_{21} \rangle \langle op \rangle \langle a_{22} \rangle \langle * \rangle \langle x_{22} \rangle \dots \langle op \rangle \langle a_{1n} \rangle \langle * \rangle \langle x_{1n} \rangle = \langle b_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle a_{m1} \rangle \langle * \rangle \langle x_{m1} \rangle \langle op \rangle \langle a_{m2} \rangle \langle * \rangle \langle x_{m2} \rangle \dots \langle op \rangle \langle a_{mn} \rangle \langle * \rangle \langle x_{mn} \rangle = \langle b_m \rangle \end{array} \right.$$

onde:

- $\langle a \rangle$  é um escalar qualquer que pode, ou não, ser o acompanhante de uma variável qualquer  $x$ ,
- $\langle b \rangle$  é o termo independente,
- $\langle N \rangle$  é o identificador, ou nome, que o distingue de outros sistemas,
- $\langle op \rangle$  é um conjunto de operandos validados para o programa,
- $\langle R \rangle$  é o sistema de referência, ou seja, o sistema que originou o sistema a ser descrito mediante uma perturbação. Utiliza-se este valor quando o sistema que se está descrevendo originou-se da perturbação realizada em outro. No caso particular, em que, o

sistema não possui nenhum sistema de referência, então o valor deste campo deve ser “O”.

- <x> é o identificador, ou nome, que o distingue dentre as outras variáveis.
- :
- => é um símbolo que indica a relação entre um sistema e suas perturbações.

A descrição dos sistemas havia sido prevista analogamente a forma como eles são, usualmente, descritos em computador, isso é, com a “linearização” dos operadores matemáticos.

A aplicação ainda oferece uma opção de submissão de arquivos com sistemas de equações para o caso em que o usuário deseje criar um conjunto de sistemas para teste e não queira descrevê-los manualmente no ambiente.

É possível informar mais de um sistema para a execução, embora a aplicação atenda a demanda de um sistema por vez. Este mecanismo está disponível na edição do sistema no ambiente computacional ou via arquivo, sendo que deve ser utilizado o símbolo “#” para separação entre sistemas e “##” para identificar fim de arquivo.

Ressalta-se que, sistemas oriundos de outros, mediante perturbações não são considerados “outros sistemas”, pois o processo de solução considera estes sistemas como extensão do sistema original. Deste modo a execução de um sistema não acaba até que a execução de todos os sistemas que o referenciam termine.

### 3.3 Aplicação Desenvolvida

Esta seção tem como objetivo descrever, em linhas gerais, a aplicação desenvolvida para submeter o modelo à análise, bem como as suas funcionalidades. Tem como foco secundário expor as dificuldades encontradas na sua construção e as estratégias utilizadas para superar estas dificuldades.

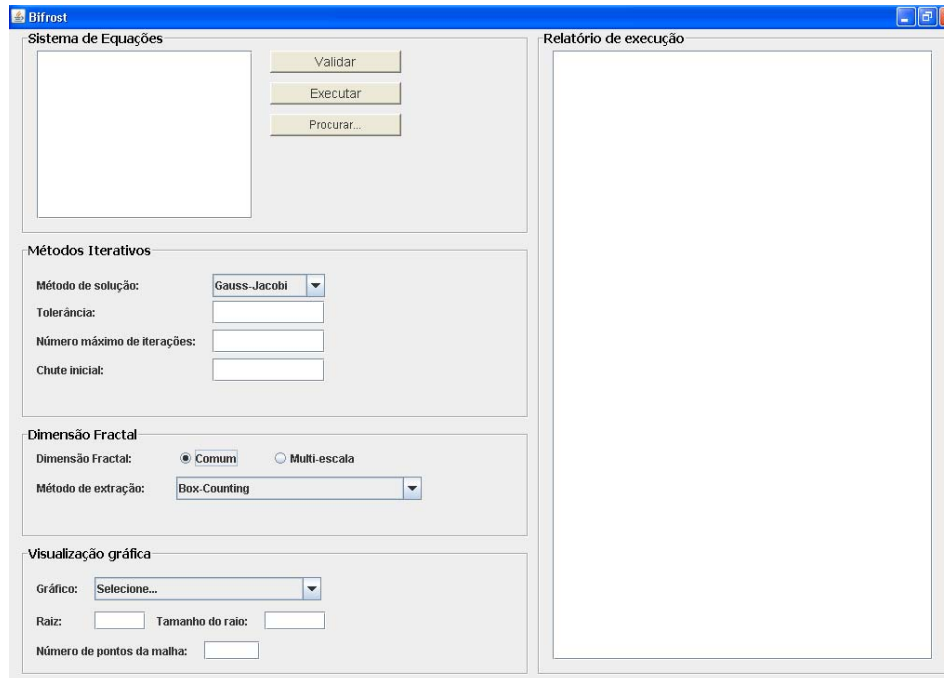
Primeiramente, ressalta-se que a aplicação desenvolvida não reflete, totalmente, o projeto que havia sido descrito na seção 3.2, proposta na época do TCI. Isto se justifica pelas modificações que o modelo matemático acabou sofrendo durante a trajetória percorrida no TCII.

A primeira tomada de decisão impactante na construção da aplicação foi utilizar uma linguagem diferente da especificada no projeto. Optou-se por utilizar o GNU Octave ao invés de Java, uma vez que o Octave é um ambiente especificamente desenvolvido para computação algébrica e simbólica e que dispõe de mecanismos de visualização gráfica bastante “poderosos”.

Acabou-se por utilizar Java apenas no desenvolvimento da interface e para realizar o controle de dados. A integração Octave e Java é realizada através da biblioteca JavaOctave, obtida em <http://kenai.com/projects/javaoctave/downloads>.

A segunda decisão, de grande impacto, foi a de não desenvolver a aplicação via browser – applet. Essa decisão ocorreu devido a uma série de fatores como facilidade de programação, desempenho e a necessidade do usuário da aplicação possuir o Octave instalado em sua máquina para poder, efetivamente, utilizar a aplicação. Por estes fatores optou-se em desenvolver a aplicação em desktop, uma vez que a única vantagem que uma aplicação applet teria sobre uma desktop estaria em não necessitar ter o programa instalado na máquina, porém o vínculo com o Octave minimiza esta vantagem.

A aplicação foi batizada com o nome de *Bifrost*, cujo nome remete a ponte arco-íris que os povos escandinavos acreditavam conectar a terra dos homens à terra dos Deuses. Tal nome fora escolhido por representar metaforicamente o intento deste trabalho de pesquisa, que fora, em síntese, a tentativa de interligar diversas áreas na tentativa de extrair um novo conhecimento, ou seja servir de “ponte” entre diversos assuntos. A interface da aplicação pode ser visualizada na Figura 18.



**Figura 18: Aplicação desenvolvida (Bifrost), em detalhe.**

Fonte: Autoria própria.

A aplicação permite ao usuário a construção de uma série de gráficos que possibilitam a análise da instabilidade no processo de solução de sistemas por métodos numéricos. O detalhamento dos gráficos disponíveis pode ser obtido na seção 3.3.1.

Algumas funcionalidades inicialmente propostas na época do TCI foram excluídas e outras modificadas.

Facilitadores que haviam sido idealizados para gerar perturbações automáticas não foram implementados, pois os ajustes realizados no modelo acabaram por tornar essa funcionalidade dispensável. A submissão de arquivos ainda é possível, porém a entrada de dados sofreu algumas modificações e elas devem ser verificadas na submissão de arquivos também. A forma como os dados de entrada (sistemas) são informados para a aplicação se ajustou ao tipo de entrada aceita pelo Octave, ou seja, em notação matricial. Essa modificação ocorreu para facilitar o uso da aplicação por aqueles que já possuem familiaridade com as rotinas e tipos de dados do Octave.

Uma entrada exemplo é ilustrada pela Figura 19.

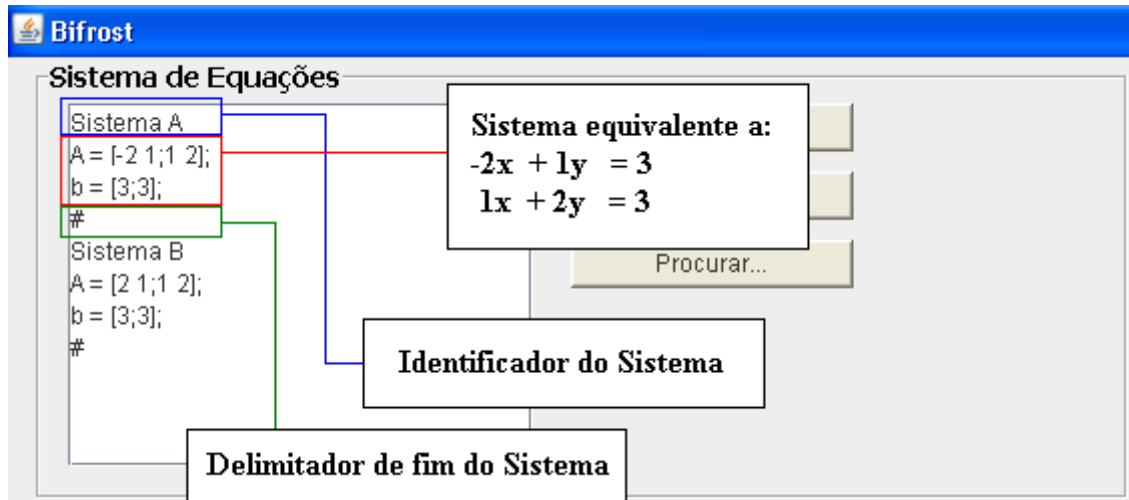


Figura 19: Entrada de dados em notação matricial do Octave.  
Fonte: Autoria própria.

O método de extração da dimensão fractal massa-raio não foi implementado devido ao seu alto custo de processamento e, uma vez que a principal funcionalidade da aplicação é submeter o modelo à análise e não torná-la o mais robusta possível e também porque o método Box-Counting realiza a mesma funcionalidade com um custo de processamento muito menor.

A implementação dos métodos numéricos e do Box-Counting foram realizados no Octave e seus algoritmos foram baseados nas fórmulas matemáticas apresentadas neste trabalho.

Com ressalva para o método Box-Counting os métodos numéricos não apresentam muitos detalhes específicos em sua implementação.

O Box-Counting, por sua vez, possui diversas implementações e adaptações e, por esta razão, faz-se necessário explicar algumas peculiaridades do método utilizado.

Neste trabalho utilizou-se o Box-Counting mais convencional, o qual consiste na sobreposição da imagem por uma malha de quadrados cujo tamanho varia a cada nova iteração. Tais quadrados (caixinhas) são posicionados a partir da margem superior esquerda da imagem e vão sendo desenhados um após o outro até a margem inferior direita da imagem. O número de iterações realizadas na imagem é definida por  $\log_2(\text{menor lado da imagem})$  e o tamanho do lado dos quadrado a cada iteração é definido por  $2^i$ , sendo  $i$  o número da iteração que está sendo executada.

Uma vez que as imagens, as quais se utiliza o Box-Counting podem não ser quadradas e/ou possuírem lados não múltiplos de dois os quadrados da malha



acabam cobrindo a imagem de uma forma não regular, ou seja, existem quadrados da malha que são desenhados um pouco achatados, devido à necessidade de se adaptarem as margens da imagem. Deste fato conclui-se que a relação entre  $s$ , tamanho do lado e  $N(s)$ , número de quadrados necessários para cobrir a imagem, é afetada de modo que a dimensão fractal obtida não é exata, mas sim uma aproximação. Este fator de erro pode ser atenuado utilizando-se um número maior de valores de  $s$  ou realizando-se uma série de deslocamentos na malha desenhada sobre a imagem, de modo que, a cada deslocamento da malha se extraí uma dimensão fractal e então, faz-se uma média dessas diferentes dimensões.

Neste trabalho de conclusão optou-se por não utilizar diversas malhas, devido ao alto custo de processamento, uma vez que as imagens geradas pela aplicação são grandes, o que já demanda um número relativamente alto de operações. Embora os resultados obtidos sejam aproximações este é o comportamento normal do método Box-Counting, o qual não é o mais exato e que fora escolhido justamente por ser o mais rápido, logo não faria sentido melhorar a qualidade de suas respostas e abdicar de sua velocidade.

### 3.3.1 Gráficos

Todas as rotinas gráficas são construídas no Octave, mas o controle dos dados é feito em Java que encapsula as funções.

Os gráficos disponíveis são apresentados no seguinte formato:

- Nome
- Conceito
- Construção
- Exemplo

**Nome:**Gráfico de órbita 2D.

**Conceito:** Este gráfico tem por objetivo demonstrar a órbita de atração de um dado ponto para o seu “atrator”, a raiz ou o Infinito. Em outras palavras, tal gráfico

descreve a sequência iterativa gerada pelo método numérico no processo de solução a partir de um ponto inicial (chute inicial).

**Construção:** O gráfico é construído em duas partes distintas. A primeira trata da construção das retas oriundas da definição do sistema e a segunda diz respeito ao conjunto de pontos que compõe a órbita calculada para um ponto inicial.

Para a construção das retas a estratégia é gerar duas equações, uma para cada linha do sistema o que requer algumas operações algébricas com o intento de isolar uma das variáveis em função da outra.

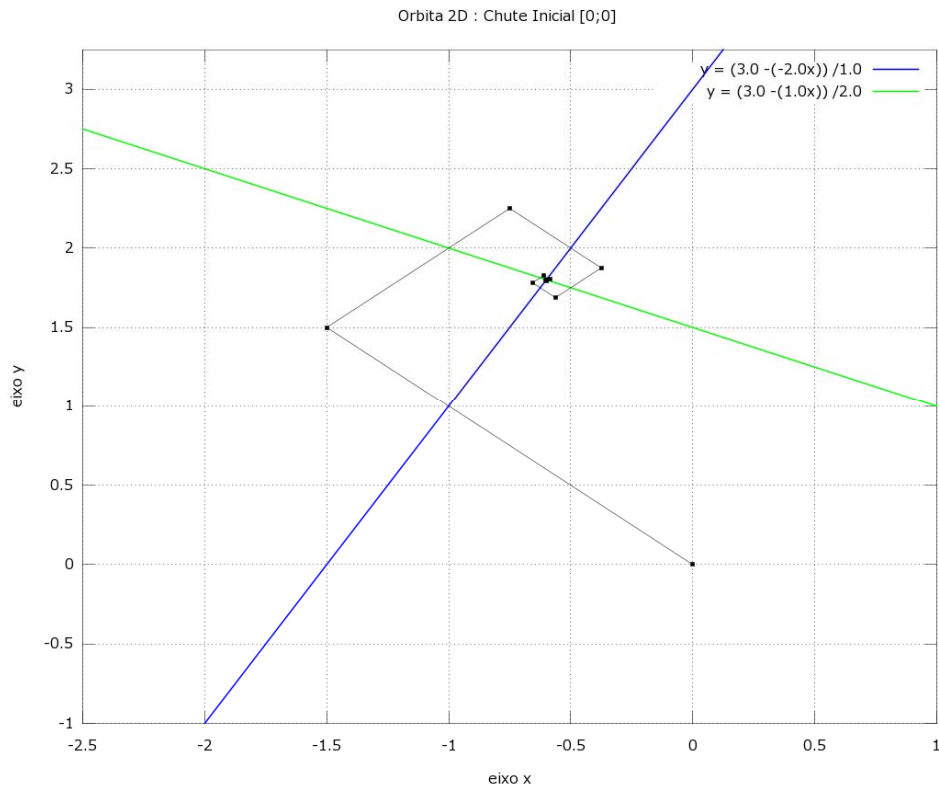
Ao término deste procedimento são delimitados os pontos pertencentes a cada uma das retas que serão exibidos, este procedimento tem como finalidade delimitar o posicionamento dos dados no gráfico para que este seja o mais centralizado possível.

O conjunto de pontos “delimitadores” é obtido tendo como base os pontos mínimo e máximo pertencentes à órbita que se deseja observar e aplicando-lhes um pequeno ajuste, o ajuste atual é  $\pm 1$ . Nota-se que, pelo pequeno ajuste realizado, é possível, em uma sequência não convergente, que uma ou ambas as retas que definem o sistema não sejam visíveis, mas a sequência sempre será exibida por completo.

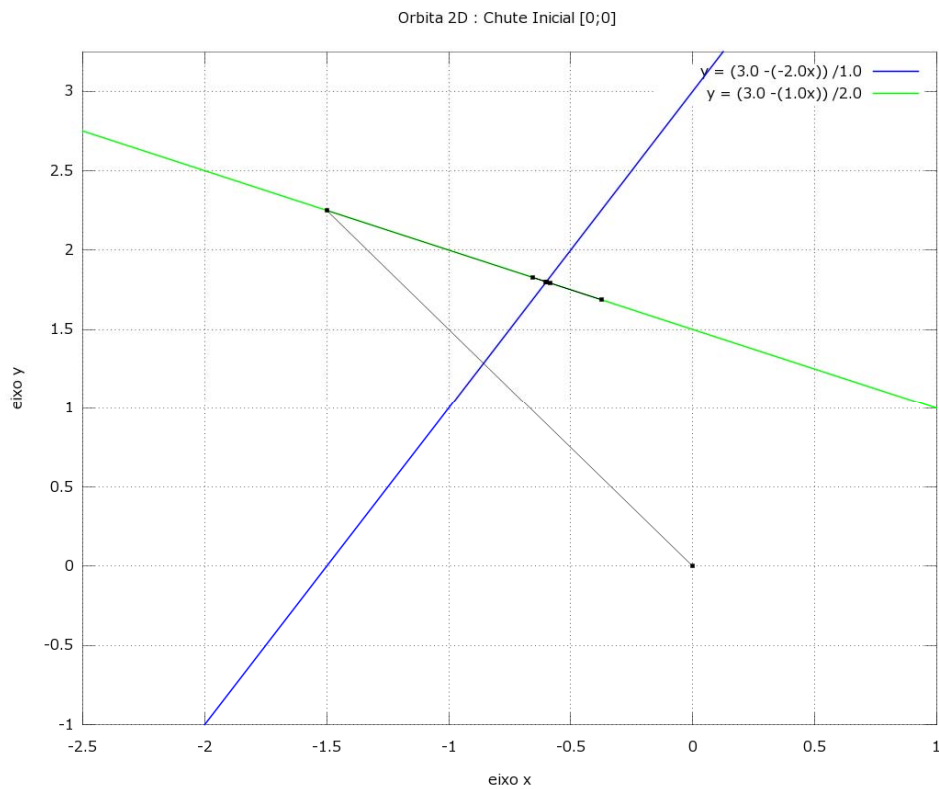
Após gerar o gráfico para ambas as retas que definem o sistema é possível obter, através da interpretação geométrica, o número de soluções do sistema.

A segunda parte do gráfico consiste, basicamente, em adicionar ao gráfico existente a sequência iterativa calculada. Para tal são utilizados dois vetores, o primeiro contém todos os valores de “x”, calculados na sequência iterativa, e o segundo os valores de “y”, desta forma todos os pares  $(x,y)$  são exibidos no gráfico previamente gerado tendo segmentos de reta ligando-os, a reta não pertence a órbita ela apenas ilustra-a.

As figuras 20 e 21 apresentam o gráfico obtido para o sistema: 
$$\begin{cases} -2x + y = 3 \\ x + 2 = 3 \end{cases}$$



**Figura 20: Gráfico da órbita de origem no ponto (0,0) calculado por Jacobi.**  
 Fonte: Autoria própria.



**Figura 21: Gráfico da órbita de origem no ponto (0,0) calculado por Seidel.**  
 Fonte: Autoria própria.

**Nome:** Órbitas 3D.

**Conceito:** O objetivo deste gráfico é demonstrar como diferentes pontos ao redor da solução (raiz do sistema) são atraídos para ela ou para o infinito. Em outras palavras, tal gráfico descreve um subconjunto das órbitas (sequências iterativas) da bacia de atração da solução do sistema ou da bacia de atração do Infinito e tem como finalidade visualizar a complexidade das relações que se estabelecem entre os pontos calculados no processo iterativo.

**Construção:** Todos os gráficos 3D possuem um pré-processamento<sup>1</sup>, isto nada mais é do que a construção de uma malha de pontos sobre a qual será gerado o gráfico.

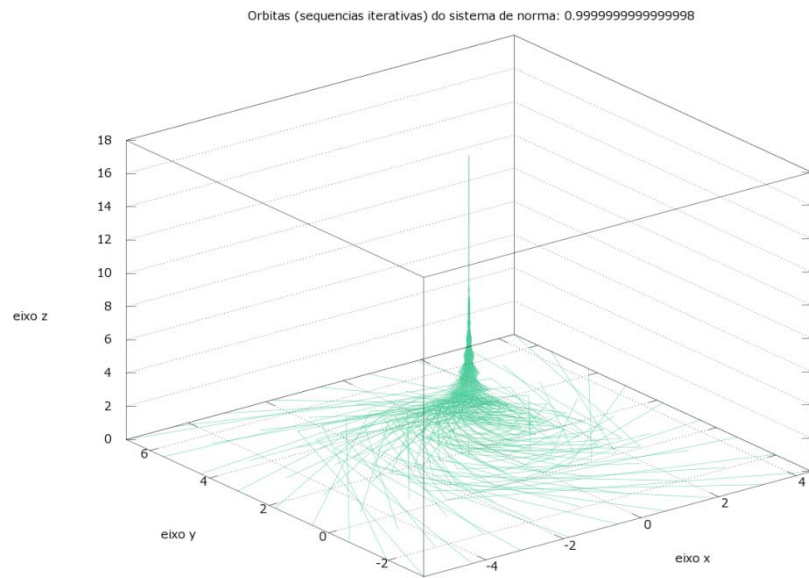
No caso deste gráfico, para cada ponto da malha o sistema é calculado e o resultado é armazenado numa matriz. A matriz contém todos os pontos da sequência iterativa.

Ao término dos cálculos tem-se um número de matrizes que deve ser equivalente aos pontos da malha, ou seja, tem-se em cada matriz a informação de cada órbita individual.

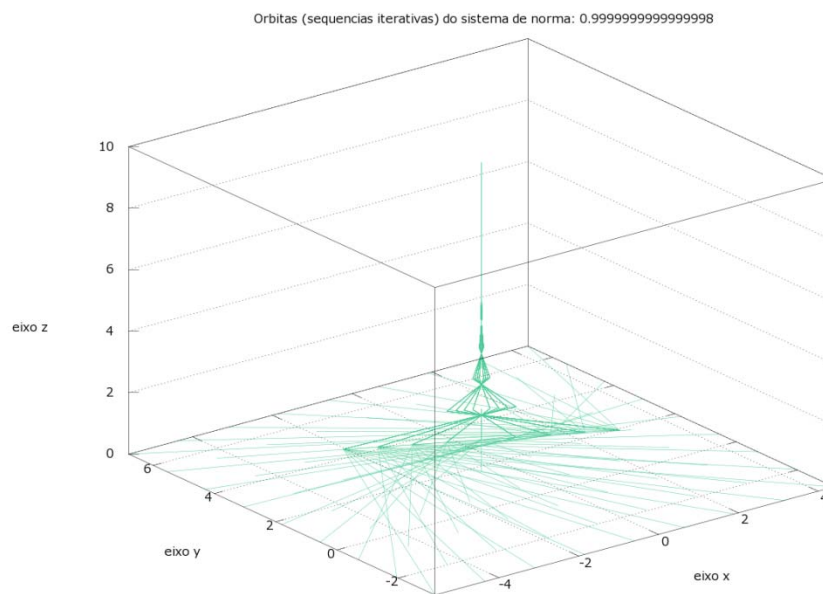
Tendo a informação de cada órbita individual o processo é bastante simples, tornando-se uma sobreposição de gráficos de órbita 3D. As figuras 22e 23 exibem este tipo de gráfico calculado para o sistema:  $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ x + 2 = 3 \end{cases}$

---

<sup>1</sup> Os pontos que compõe a malha são escolhidos levando em consideração 3 variáveis, *número de pontos estimado da malha* (mínimo estipulado), *raiz do sistema* e *raio*. O raio, centrado na raiz, estipula o lado mínimo de um quadrado que circunscreve o círculo por ele definido. O quadrado, por sua vez, delimita onde os pontos da malha serão gerados. Todos os pontos da malha são igualmente espaçados entre si, respeitam os limites delimitados pelo quadrado e são definidos tantos pontos quantos forem definidos pela variável número de pontos estimado da malha, além disto um dos pontos gerados deve ser a própria raiz. Os valores das variáveis citadas são passadas pelo usuário, exceto a raiz que é opcional.



**Figura 22: Gráfico das órbitas calculadas pelo método de Jacobi.**  
Fonte: Autoria própria.



**Figura 23: Gráfico das órbitas calculadas pelo método de Seidel.**  
Fonte: Autoria própria.

**Nome:** Superfície de velocidade de convergência.

**Conceito:** Este gráfico apresenta uma análise holística da relação entre a distância euclidiana, em relação a solução, e a velocidade de convergência dos pontos obtidos no processo de solução.

### Construção:

Para a visualização das velocidades de convergência são utilizados dois gráficos em apenas uma janela de visualização.

O primeiro, apresentado na figura 24a, é construído a partir da resolução do sistema para cada um dos pontos integrantes da malha gerada ao redor da raiz.

Durante o processo iterativo são anotados o ponto e o número de iterações que este demorou para convergir ou não, caso em que o ponto é atraído para o infinito<sup>2</sup>.

Conhecendo os pontos e suas respectivas velocidades de convergência inicia-se o processo de construção de uma matriz que servirá de base para a superfície que será exibida.

A construção da matriz segue a seguinte regra: cada ponto do tipo  $pt(i,j)$  pertencente a matriz deve conter a velocidade de convergência do par  $(X(j), Y(i))$ , onde  $X$  e  $Y$  são vetores que contém todos os valores de “x” e “y” calculados.

Exemplo: Dados os vetores  $X$  e  $Y$  extraídos da malha de pontos e o vetor de velocidade de convergência  $VC$ .

$$X = [1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4]$$

$$Y = [1,2,3,4,1,2,3,4,1,2,3,4,1,2,3,4]$$

$$VC = [11,12,13,14,21,22,23,24,31,32,33,34,41,42,43,44]$$

Tem-se, que o ponto  $pt(1,5)$  pertencente a matriz tem a velocidade de convergência que fora calculada para o ponto  $p = (2,1)$ ,  $(X(5) = 2, Y(1) = 1)$  da malha, ou seja, 21 iterações.

Outro gráfico apresentado na figura 24b utiliza-se do mesmo procedimento, no entanto, seu enfoque é o do contorno da superfície gerada. O que difere ambos é a função gráfica que é chamada no Octave sobre os valores, “surf” para o primeiro e “contourf” para o segundo.

---

<sup>2</sup>Em um sistema linear a bacia do infinito pode não existir, dado que um número suficientemente grande de iterações garantirá sempre a convergência, caso o critério Gauss-Seidel seja satisfeito, é claro. Entretanto, o que pode ocorrer é da sequência iterativa convergir muito lentamente sendo impossível determinar qual o número de iterações necessários para a convergência.

As figuras 24, 24be 25 exibem este tipo de gráfico calculado para o sistema:

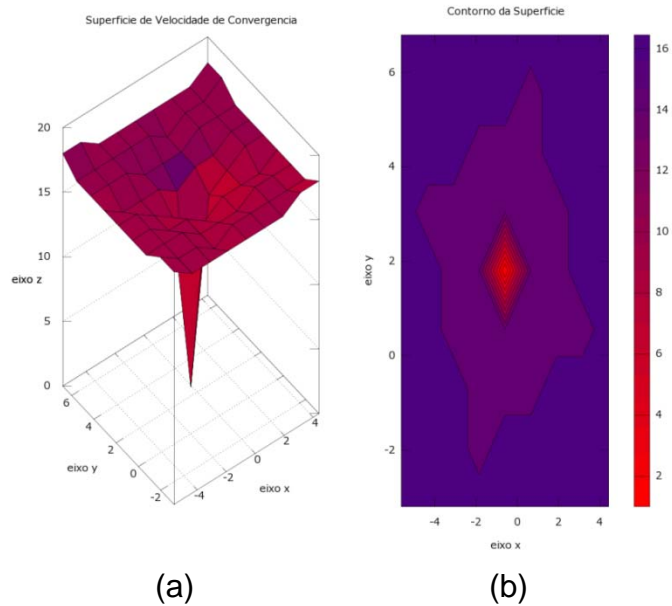


Figura 24: Gráfico da superfície de velocidade de convergência calculado por Jacobi.  
Fonte: Autoria própria.

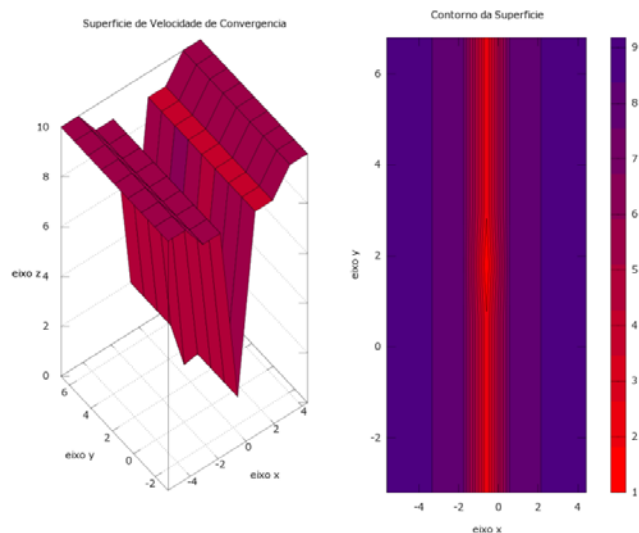


Figura 25: Gráfico da superfície de velocidade de convergência calculado por Seidel.  
Fonte: Autoria própria.

**Nome:** Bacia de convergência.

**Conceito:** Este gráfico, assim como o gráfico da superfície de velocidade de convergência é uma forma de visualização da bacia de atração da raiz do sistema levando em consideração a velocidade de convergência, no entanto neste gráfico utiliza-se apenas do recurso de pintura para demonstrar esta velocidade, sem

utilizar uma dimensão a mais que as variáveis do sistema para acomodar as iterações em que os pontos foram calculados.

A ideia é que neste gráfico sejam efetuados um número maior de cálculos, ou seja, que não se gere uma malha tão esparsa, mas sim o mais detalhada possível.

**Construção:** O processo de construção deste gráfico é o mesmo do anterior, no entanto utiliza-se um comando do Octave sobre os valores calculados para interpolação sobre a cor que será aplicada a um certo ponto.

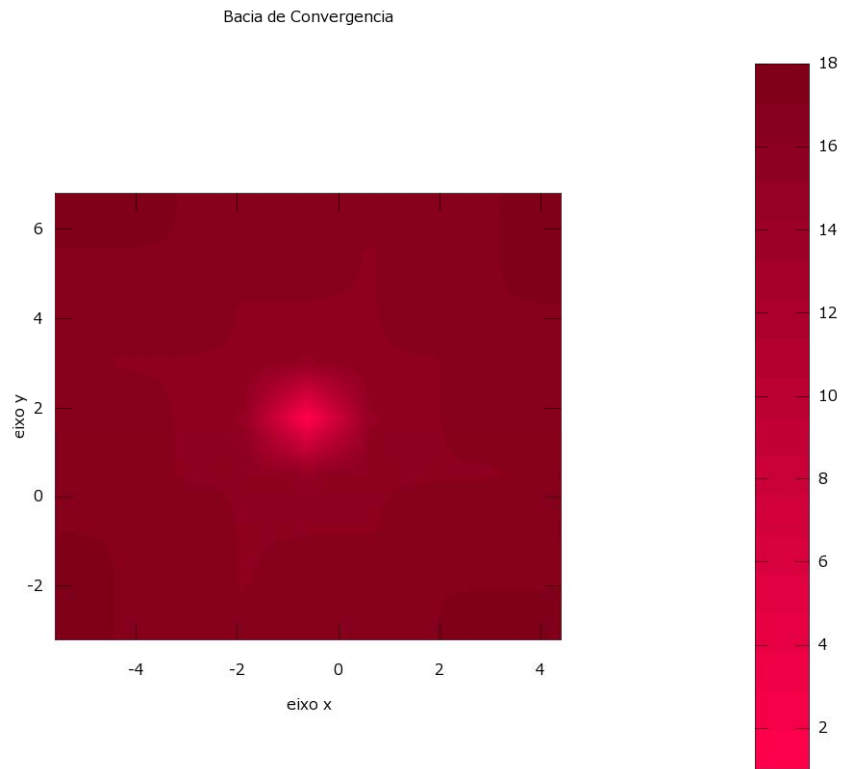
O ideal para este tipo de gráfico seria que cada pixel exibido na tela fosse um ponto de entrada na malha a ser resolvida, o que, obviamente, demandaria um alto custo de processamento e, no entanto, até mesmo neste caso a visualização seria imprecisa, posto que existem infinitos pontos entre um pixel e outro.

Pensando nisto utilizou-se a opção de interpolação disponibilizada neste gráfico para gerar uma aproximação de qual seria a velocidade de convergência de pontos que não foram calculados, ou seja, os resultados deste gráfico são um pouco mais próximos da verdadeira forma da bacia de atração.

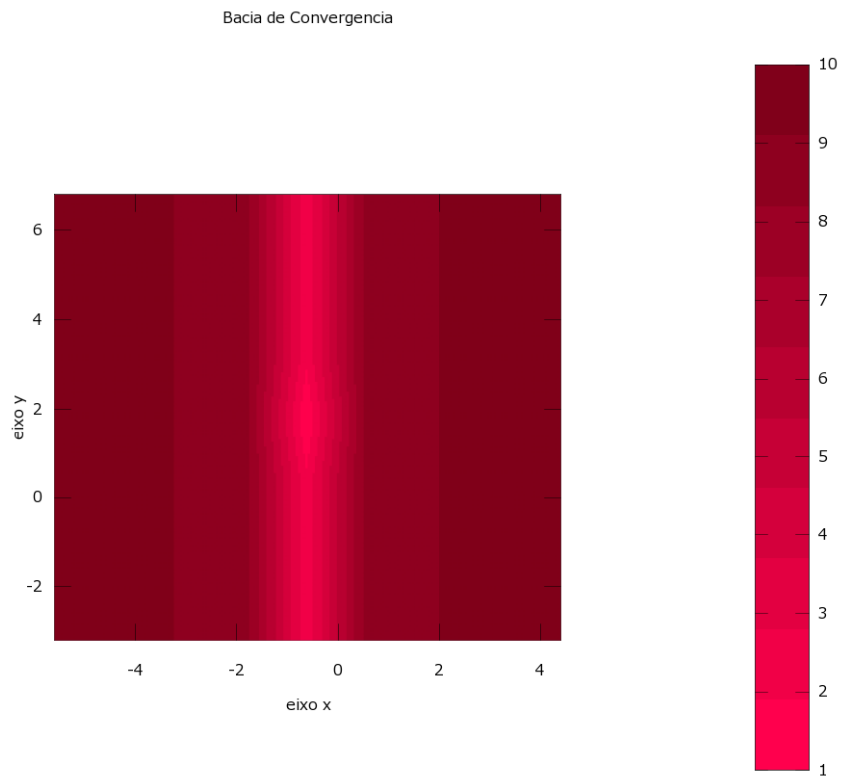
As figuras 26 e 27 exibem este tipo de gráfico calculado para sistema

$$\begin{cases} -2x + y = 3 \\ x + 2 = 3 \end{cases}$$





**Figura 26: Gráfico da Bacia de Convergência calculado por Jacobi.** Fonte: Autoria própria.



**Figura 27: Gráfico da Bacia de Convergência calculado por Seidel.** Fonte: Autoria própria.  
**Nome:** Interdependência das variáveis – única órbita.

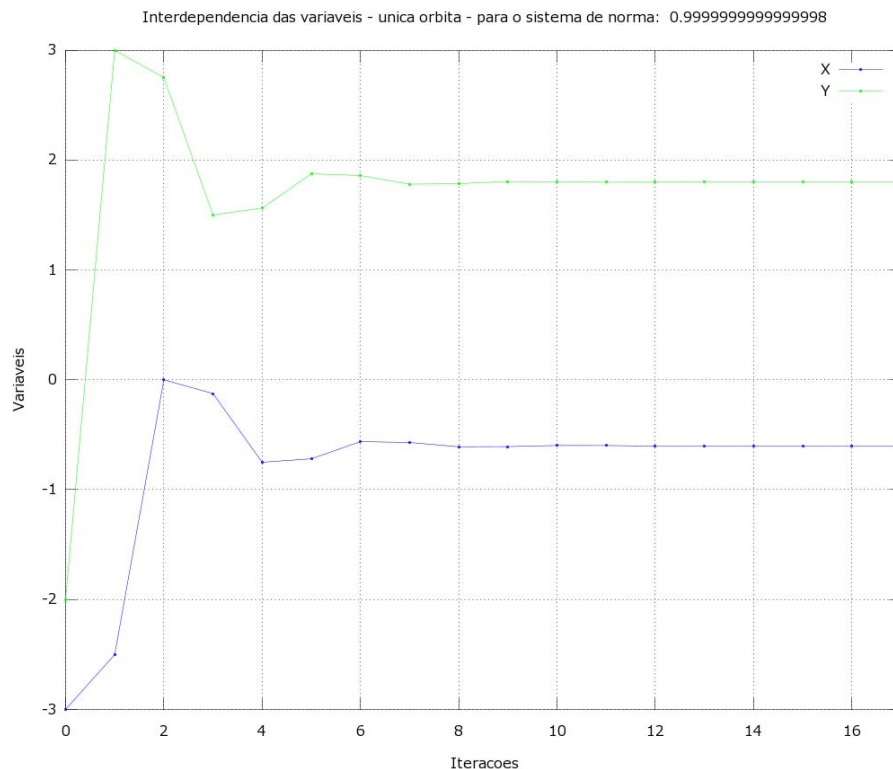
**Conceito:** Este gráfico apresenta como o processo iterativo gerou os valores de cada uma das variáveis do sistema individualmente.

Tal visualização possibilita a análise de como a instabilidade afeta as diferentes variáveis do sistema, de modo que se possa inferir se esta instabilidade está restrita a, apenas, uma das variáveis.

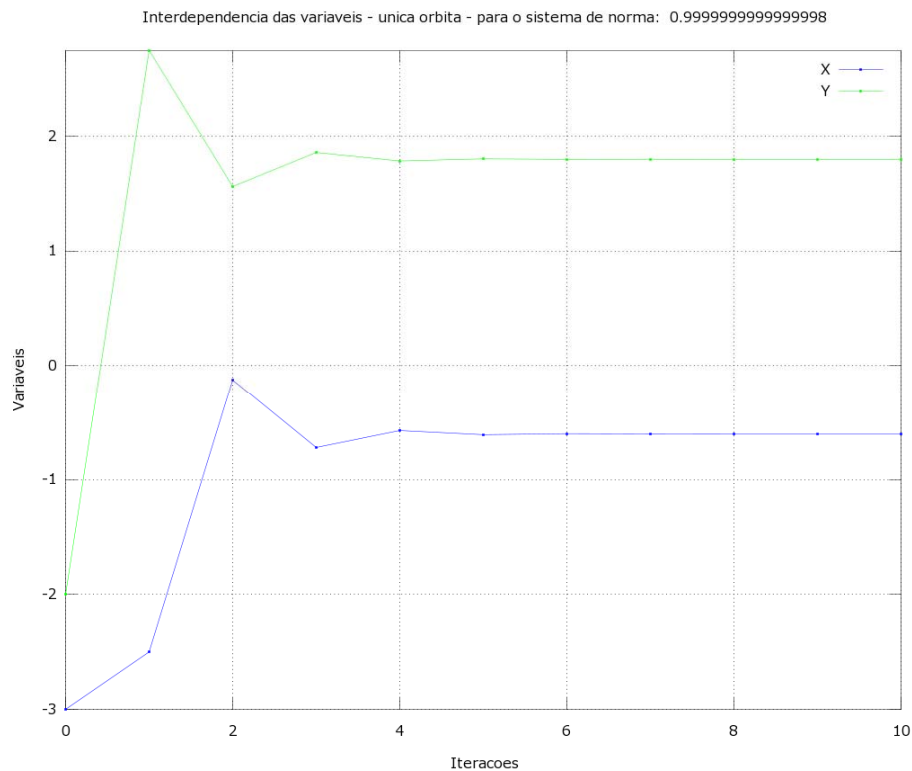
Este gráfico é gerado para uma única órbita do sistema.

**Construção:** Dada a matriz que contém todos os valores calculados pela sequência iterativa (retorno de algum método numérico), extraem-se  $n$  vetores desta matriz, onde  $n$  é o número de variáveis do sistema, onde cada vetor contém todos os diferentes valores atribuídos a uma única variável durante o processo de solução.

O gráfico é construído pela sobreposição de gráficos do tipo *iteração x valor variável* para cada um dos vetores existentes, sendo que a cada vetor é atribuído uma cor distinta. As figuras 28 e 29 ilustram este tipo de gráfico para os métodos Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel.



**Figura 28:** Gráfico de Interdependência das variáveis – única órbita – para a órbita originária do ponto  $(-3,-2)$  calculada por Jacobi. Fonte: Autoria própria.



**Figura 29: Gráfico de Interdependência das variáveis – única órbita – para a órbita originária do ponto (-3,-2) calculada por Seidel.**

Fonte: Autoria própria.

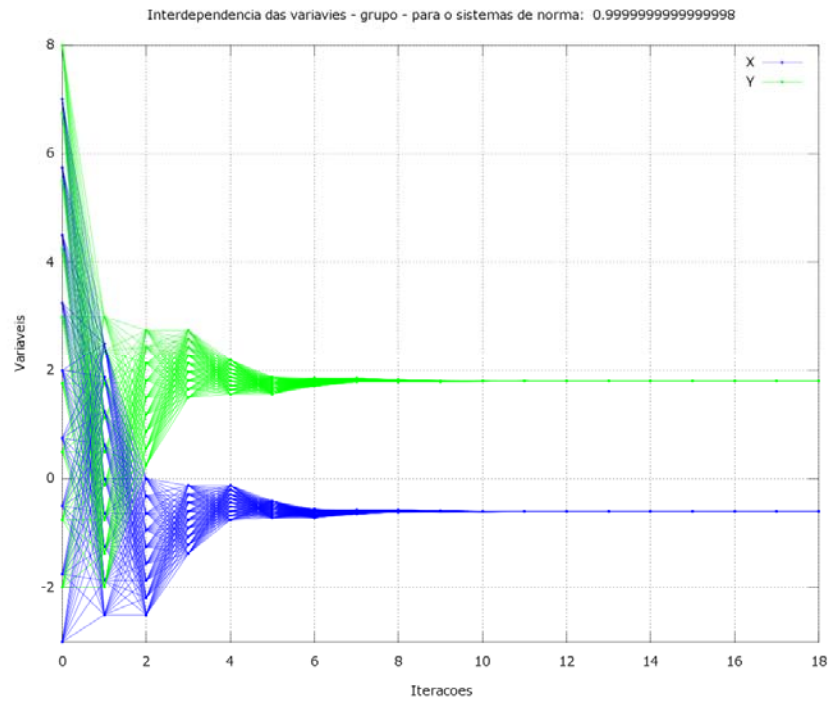
**Nome:** Interdependência das variáveis – grupo.

**Conceito:** Este gráfico é uma expansão do gráfico de interdependência de variáveis para uma única órbita, sendo que neste caso o gráfico é gerado para todas as órbitas da malha calculada.

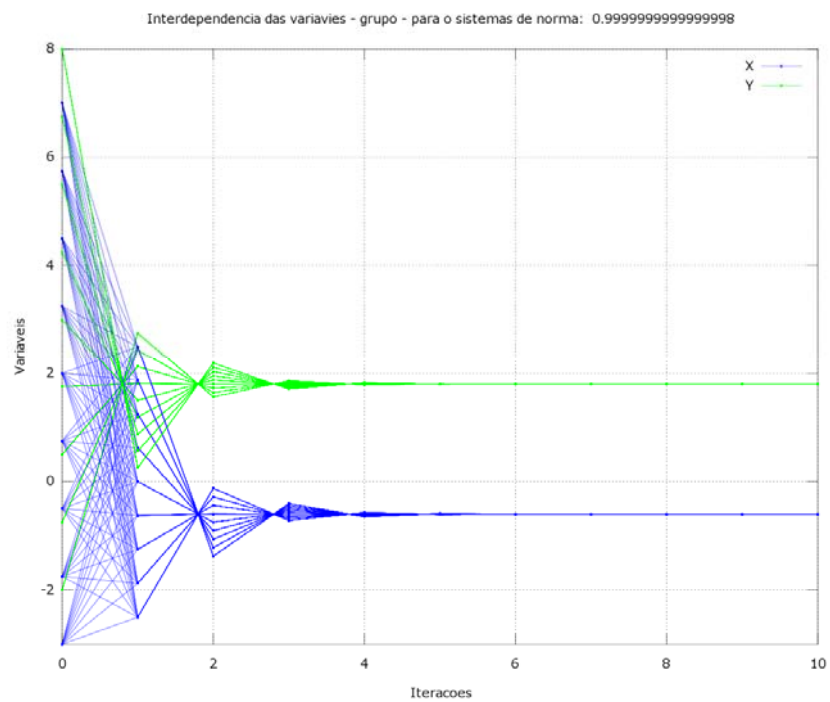
**Construção:** O processo de construção é semelhante ao descrito no gráfico anterior.

A diferença é que este é, na verdade, um conjunto de gráficos de interdependência de variáveis para uma única órbita, portanto a sua construção é realizada efetuando a sobreposição de vários gráficos de uma única órbita para cada órbita calculada a partir da malha.

As figuras 30 e 31 ilustram este tipo de gráfico para os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel.



**Figura 30: Gráfico de Interdependência das variáveis – grupo – para todas as órbitas da malha calculados por Jacobi.**  
 Fonte: Autoria própria.



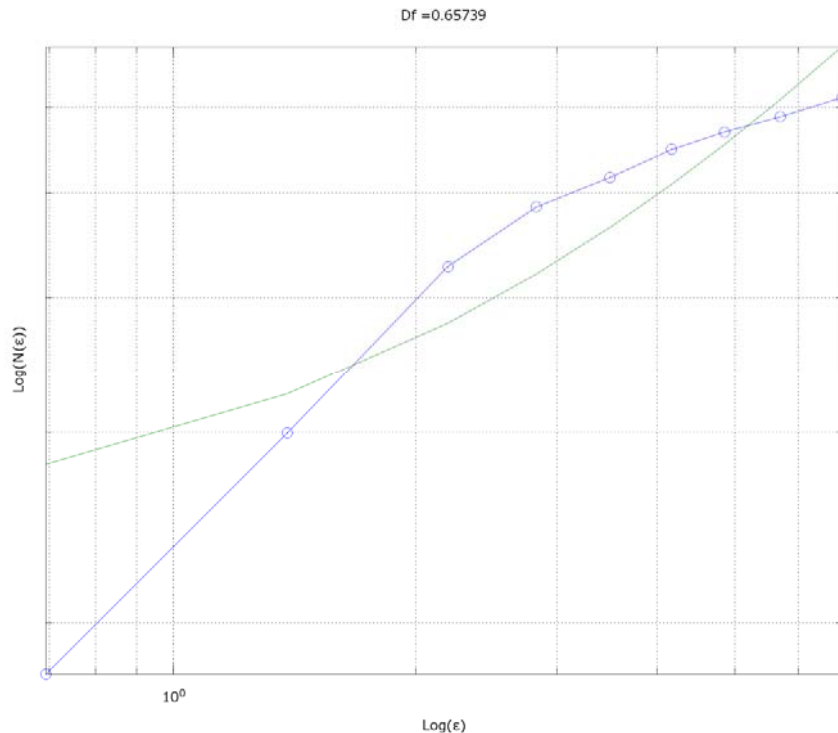
**Figura 31: Gráfico de Interdependência das variáveis – grupo – para todas as órbitas da malha calculados por Seidel.**  
 Fonte: Autoria própria.

**Nome:** Dimensão Fractal.

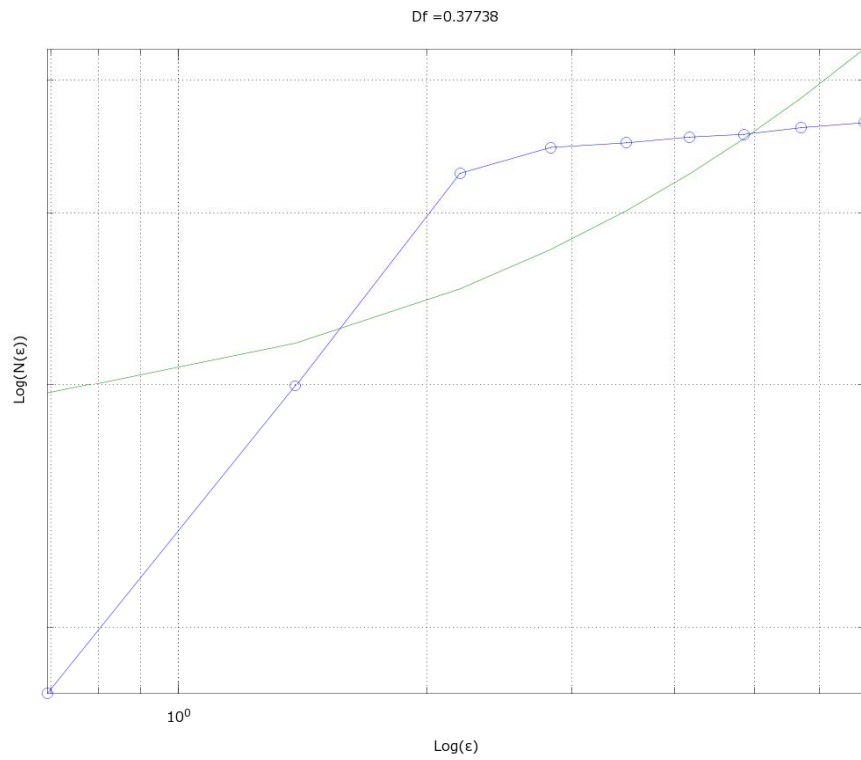
**Conceito:** Gráfico bi-log que representa a dimensão fractal calculada pelo método Box-Counting. O coeficiente da reta que melhor se ajusta a todos os pontos calculados é a dimensão fractal.

**Construção:** O processo de construção deste gráfico se dá na disposição do  $\log(\epsilon) \times \log(N(\epsilon))$ , onde  $\epsilon$  representa os diversos tamanhos dos quadrados que compõem a malha que é sobreposta a imagem, a qual, se deseja extrair a dimensão fractal e  $N(\epsilon)$  é a contagem de quantos quadrados de lado  $s$  foram necessários para cobrir toda a imagem.

As figuras 32 e 33 contemplam este tipo de gráfico calculado para os métodos Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel sobre o sistema:



**Figura 32: Gráfico de Dimensão Fractal sobre o sistema calculado por Jacobi.**  
Fonte: Autoria própria.



**Figura 33: Gráfico de Dimensão Fractal sobre o sistema calculado por Seidel.**  
Fonte: Autoria própria.

#### 4 CONSTRUÇÃO DE CENÁRIOS PARA ENCAMINHAMENTO DA CONCLUSÃO

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos pela aplicação em dois formatos, a saber: o primeiro formato consiste na apresentação de cada gráfico gerado para três cenários distintos, cenário estável (sistema com norma euclidiana  $\cong 1$ ), cenário instável (sistema com norma euclidiana  $\cong 0$ ) e cenário médio (sistema com norma euclidiana  $\cong 0.5$ ) de modo a ilustrar como a aplicação possibilita a exploração visual da instabilidade numérica em sistemas de equações; o segundo formato consiste na validação do modelo e, para tal, serão utilizados dois gráficos, um contendo a norma e a dimensão fractal calculada para diversos sistemas e outro contendo a curva de fractalidade de diversos sistemas de norma semelhante.

Os cenários utilizados nesta seção estão detalhados a seguir.

Tipo de cenário	Sistema de equações	Norma
Estável	$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$	0,99228
Médio	$\begin{cases} 2x + 1,3y = 10,6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$	0,50620
Instável	$\begin{cases} -8,3062x - 8,1405y = -41,034 \\ 4,9519x + 5,1033y = 25,214 \end{cases}$	0,02512732567580073

Quadro 1: Cenários utilizados, Estável, Médio e Instável, respectivamente.

Os resultados obtidos em cada cenário são exibidos no formato: configuração – nome do gráfico – figuras – análise. Foram utilizadas duas configurações: uma para o método de Gauss-Jacobi, outra para o método de Gauss-Seidel:

➤ **Configuração 1: Jacobi**

Critério de parada: Erro absoluto menor que 0.0001

Número máximo de iterações: 500

Raio: 5 (A malha é desenhada dentro de um quadrado de lado 10)

Método para dimensão fractal: Box-Counting

➤ **Configuração 2: Seidel**

Critério de parada: Erro absoluto menor que 0.0001

Número máximo de iterações: 500

Raio: 5 (A malha é desenhada dentro de um quadrado de lado 10)

Método para dimensão fractal: Box-Counting

### Configuração1: Jacobi

#### Nome do gráfico: Órbita 2D

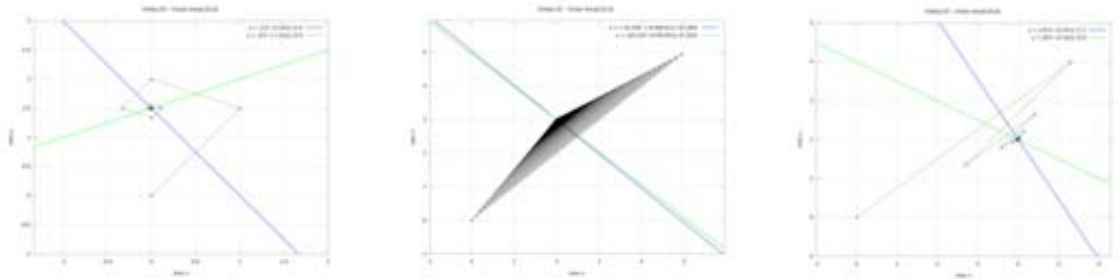


Figura 34: Cenário estável, instável e médio, respectivamente, para o gráfico de órbita 2D.

**Análise:** É possível verificar que as órbitas de sistemas estáveis diferem-se das de sistemas instáveis quanto a sua forma. Essa diferença se dá, justamente, na instabilidade, posto que é verificado certa oscilação nos resultados de órbitas instáveis. Percebe-se que, dados 4 valores consecutivos em órbitas instáveis, a distância euclidiana entre os pontos pares e ímpares é muito pequena, ou seja, o ponto calculado numa iteração  $i$  é bastante próximo do ponto  $i+2$ , mas bastante distante do ponto  $i+1$  e, por sua vez o ponto  $i+1$  é bastante próximo do ponto  $i+4$ . Esse fenômeno se repete durante todo o processo de solução, de modo que se pode especular que quanto menor esta distância, mais iterações o sistema demanda para a convergência.

#### Nome do gráfico: Órbitas 3D

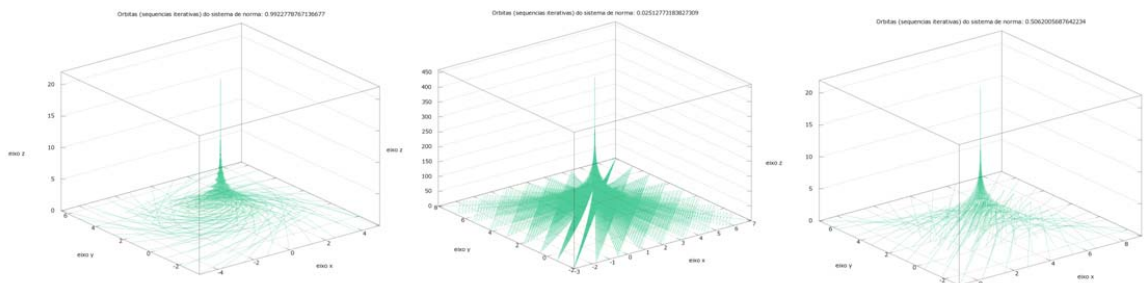


Figura 35: Cenário estável, instável e médio, respectivamente, para o gráfico de órbitas 3D.

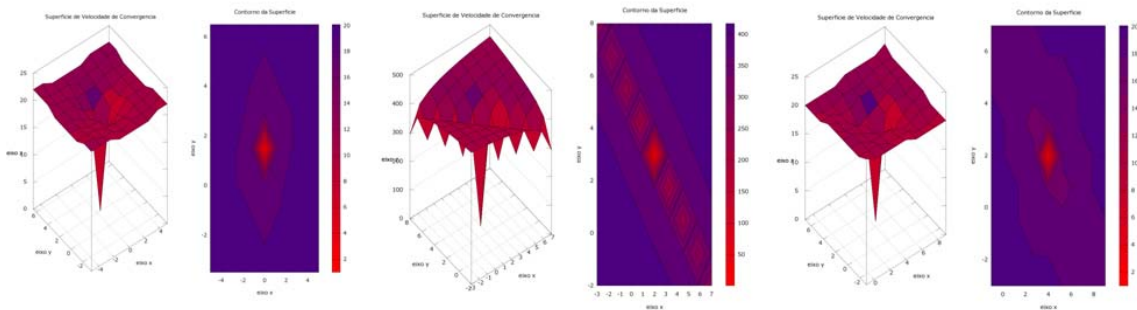
**Análise:** É verificado neste gráfico que todas as órbitas convergentes possuem comportamentos semelhantes, como era esperado.



Os sistemas instáveis que satisfazem o critério de Gauss-Seidel possuem órbitas não circulares que vão se afilando, ou seja, existe um certo avanço em relação a raiz a cada novo ponto gerado, mesmo que seja muito pequeno. Os sistemas estáveis possuem órbitas circulares.

O número de pontos dos sistemas instáveis tende a ser maior que o dos estáveis dada a oscilação que é verificada nas sequências iterativas destes sistemas.

**Nome do gráfico:**Superfície de velocidade de Convergência

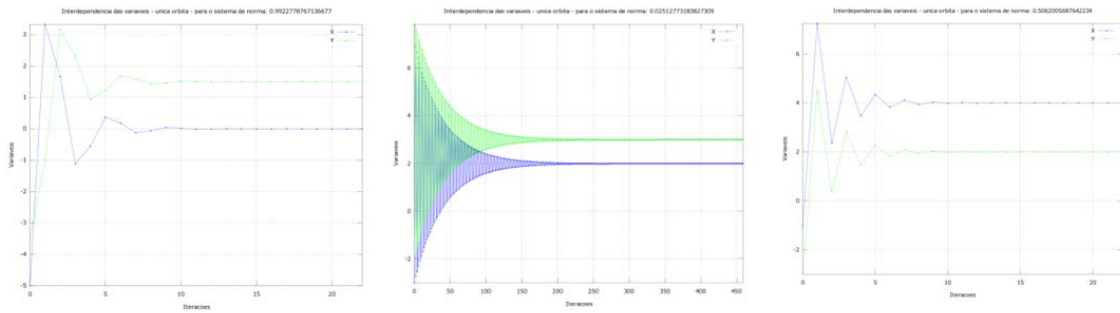


**Figura 36: Cenário estável, instável e médio, respectivamente, para o gráfico de superfície de velocidade de convergência.**

**Análise:** Tem-se que, teoricamente, dados dois pontos no plano cartesiano I1 e I2 cuja distância euclidiana para a raiz é a mesma, especula-se que, caso estes pontos sejam utilizados como “chutes iniciais” para as sequências iterativas, as velocidades de convergência destes dois pontos devem ser semelhantes senão iguais, porém, as figuras sugerem algo um pouco diferente. Em verdade sabe-se que essa discrepância se dá pela falta de pontos calculados e o modo como a superfície é construída pelo Octave, uma vez que ela não suaviza as mudanças entre um ponto e outro, exibindo uma linha reta para interliga-los. Logo, se houvessem infinitos pontos sendo calculados a forma da superfície de sistemas estáveis aproximar-se-ia da de um cone perfeito.

É possível suavizar a superfície visualizada bastando escolher um número maior de pontos para o cálculo e diminuindo o tamanho do raio, o que faz com que a distância entre os pontos da malha calculada seja menor e, portanto, suavize este comportamento.

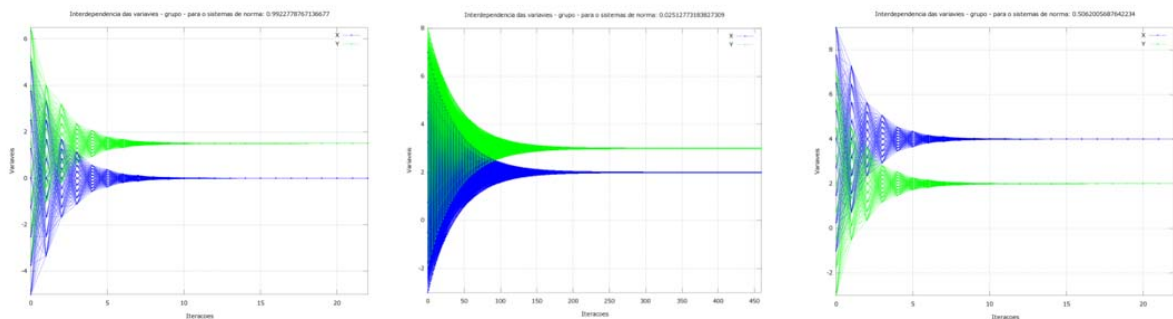
**Nome do gráfico:** Interdependência das Variáveis – única órbita



**Figura 37:** Cenário estável, instável e médio, respectivamente, para o gráfico de Interdependência das variáveis – única órbita.

**Análise:** A oscilação das sequências iterativas de sistemas instáveis fica mais evidente com este gráfico e, embora nas figuras exibidas ambas as variáveis sejam afetadas, aparentemente, de mesmo modo, isso nem sempre se verifica. É possível que apenas uma das variáveis esteja oscilando enquanto a outra mantém-se mais estável e verificar essa diferença entre as variáveis é justamente a informação que este gráfico possibilita.

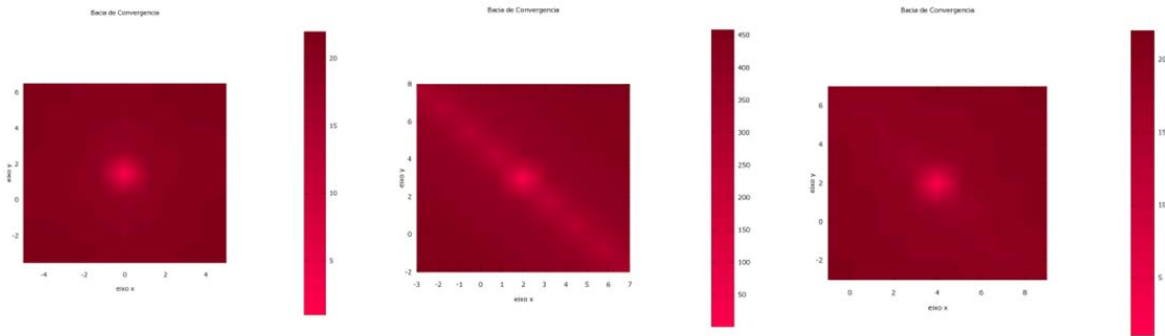
**Nome do gráfico:** Interdependência das Variáveis – grupo



**Figura 38:** Cenário estável, instável e médio, respectivamente, para o gráfico de Interdependência das variáveis – grupo.

**Análise:** Similar ao que se pode inferir com o gráfico de interdependência – única órbita, este gráfico possibilita uma análise de como a instabilidade influencia nos valores calculados para todas as variáveis do sistema durante o processo de solução. Ao valer-se de um conjunto de órbitas e não uma única pode-se ter uma ideia melhor de como os valores das variáveis estão sendo afetados para este conjunto e, conseqüentemente, se pode intuir como a instabilidade afeta o valor de cada variável para qualquer órbita possível.

### Nome do gráfico: Bacia de Convergência

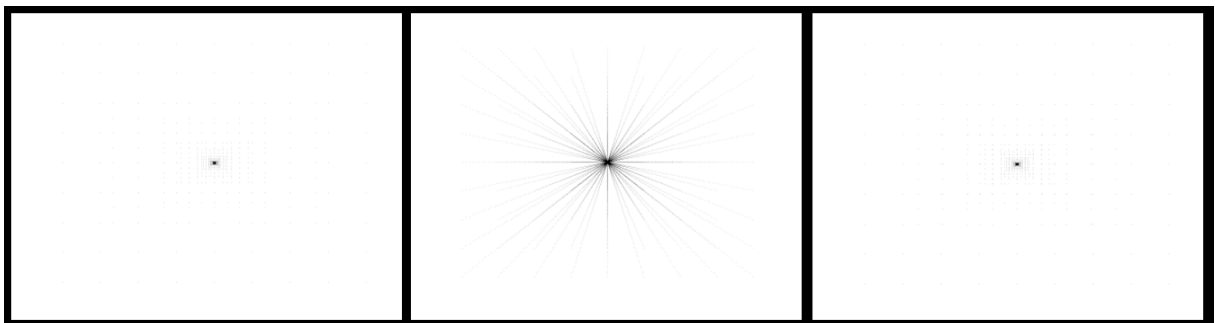


**Figura 39: Cenário estável, instável e médio, respectivamente, para o gráfico de bacia convergência.**

**Análise:** O comportamento abrupto visualizado nas superfícies é suavizado por este gráfico que dispõe de um mecanismo de pintura que infere qual velocidade (cor) um dado ponto deveria possuir caso fosse calculado. Nele é bastante evidente a “forma” da bacia de convergência da raiz.

A partir dessa figura se pode intuir qual a velocidade que algum valor inicial terá, dada a distância da raiz, uma vez que se pode verificar qual o padrão ou limite em que um dado ponto passa a convergir numa velocidade distinta, ou deixa de convergir.

### Nome do gráfico: Órbitas em pontos



**Figura 40: Cenário estável, instável e médio, respectivamente, para o gráfico de órbitas em pontos.**

**Análise:** Este gráfico não está disponível para os usuários da aplicação.

Ele é um gráfico interno cuja função é a de representar o gráfico de órbitas 3D transformando-o para o plano 2D. É a partir da figura deste gráfico que o Box-Counting é aplicado.

### Nome do gráfico: Dimensão Fractal ( $\log(\epsilon) \times \log(N(\epsilon))$ )

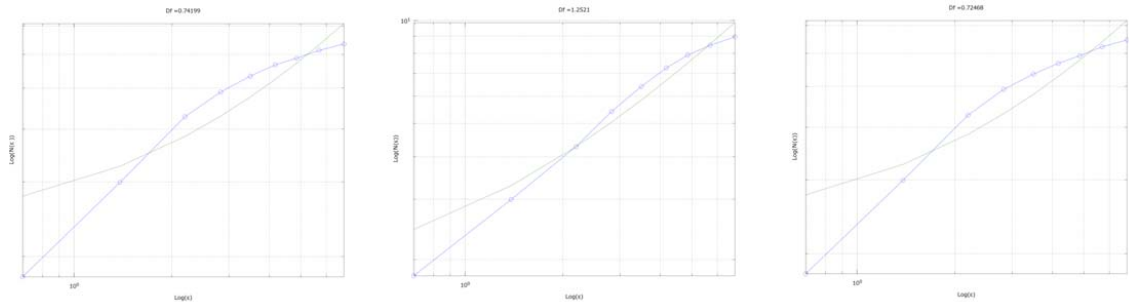


Figura 41: Cenário estável, instável e médio, respectivamente, para o gráfico de dimensão fractal.

**Análise:** A média da dimensão fractal dos sistemas instáveis é superior a dos estáveis.

Tem-se, que quanto mais próxima de 2 for a dimensão fractal extraída, mais complexa é a figura analisada e quanto mais próxima de 0 menos complexa é a figura, uma vez que a dimensão máxima que pode ser obtida em um plano 2D é 2 – toda a superfície (quadrado) – e a menos complexa seria um ponto – dimensão 0.

### Configuração2: Seidel

#### Nome do gráfico: Órbita 2D

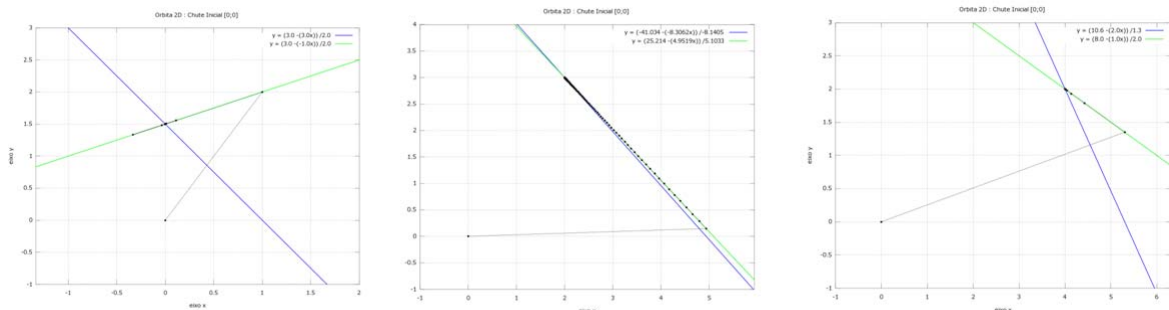


Figura 42: Cenário estável, instável e médio, respectivamente, para o gráfico de órbita 2D.

**Análise:** As conclusões que podem ser efetuadas sobre este gráfico são basicamente as mesmas descritas na análise da configuração Jacobi, porém em Seidel verifica-se que, uma vez que a sequência iterativa gera valores que pertencem a uma das retas que definem o sistema, todos os demais valores gerados estarão sobre essa reta.

### Nome do gráfico: Órbitas 3D

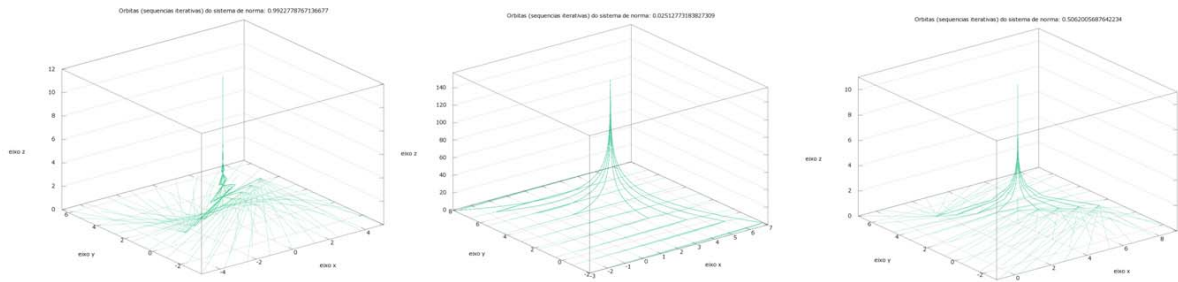


Figura 43: Cenário estável, instável e médio, respectivamente, para o gráfico de órbitas3D.

**Análise:** A análise das figuras deste gráfico para a configuração Seidel contempla àquelas descritas na análise deste mesmo gráfico para Jacobi, porém os comportamentos cíclicos das órbitas de sistemas estáveis são atenuadas tornando-se retas após atingirem uma das retas que definem o sistema.

### Nome do gráfico: Superfície de velocidade de Convergência

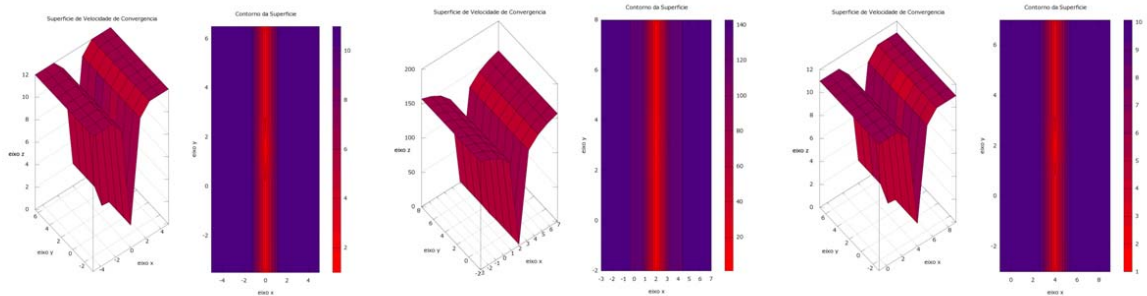
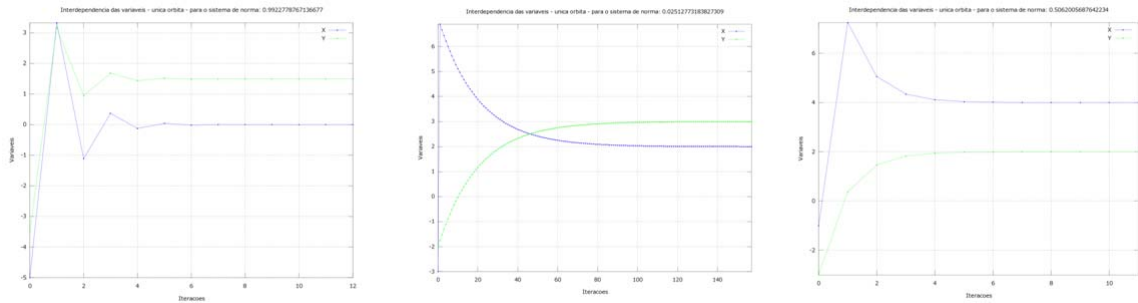


Figura 44: Cenário estável, instável e médio, respectivamente, para o gráfico de superfície de velocidade de convergência.

**Análise:** As conjecturas especificadas para este gráfico em Jacobi ainda são verificadas para Seidel.

É possível suavizar a superfície visualizada bastando escolher um número maior de pontos para o cálculo e diminuindo o tamanho do raio, o que faz com que a distância entre os pontos da malha calculada seja menor e, portanto, suavize este comportamento.

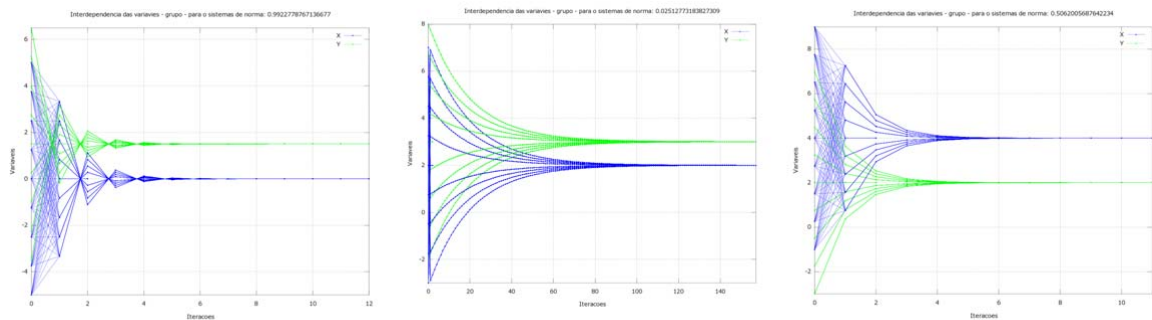
### Nome do gráfico: Interdependência das Variáveis – única órbita



**Figura 45: Cenário estável, instável e médio, respectivamente, para o gráfico de Interdependência das variáveis – única órbita.**

**Análise:** A análise descrita para os gráficos deste tipo para a configuração Jacobi pode ser expandida para este.

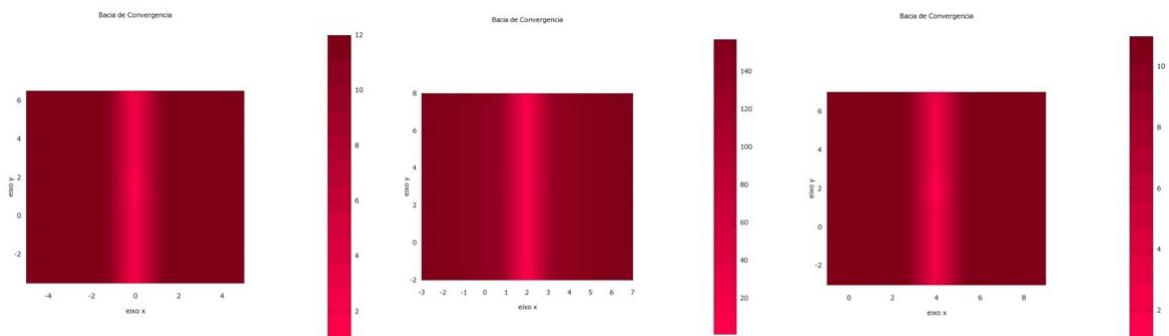
### Nome do gráfico: Interdependência das Variáveis – grupo



**Figura 46: Cenário estável, instável e médio, respectivamente, para o gráfico de Interdependência das variáveis – grupo.**

**Análise:** A análise deste item é equivalente a verificada na configuração Jacobi.

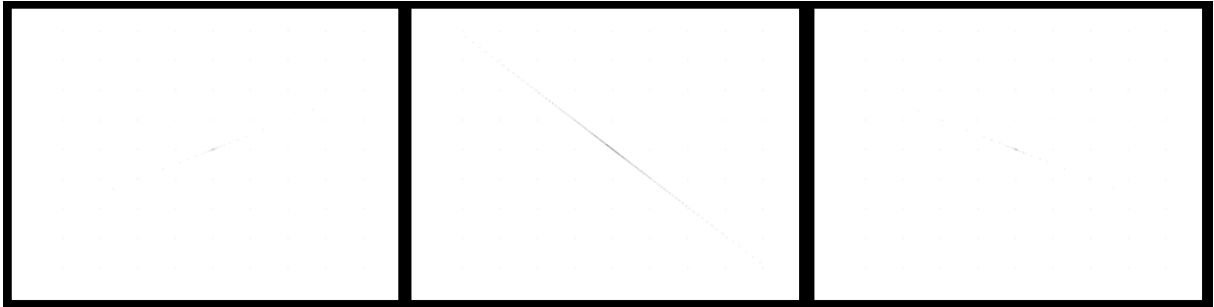
### Nome do gráfico: Bacia de Convergência



**Figura 47: Cenário estável, instável e médio, respectivamente, para o gráfico de bacia convergência.**

**Análise:** A análise deste item é equivalente a verificada na configuração Jacobi.

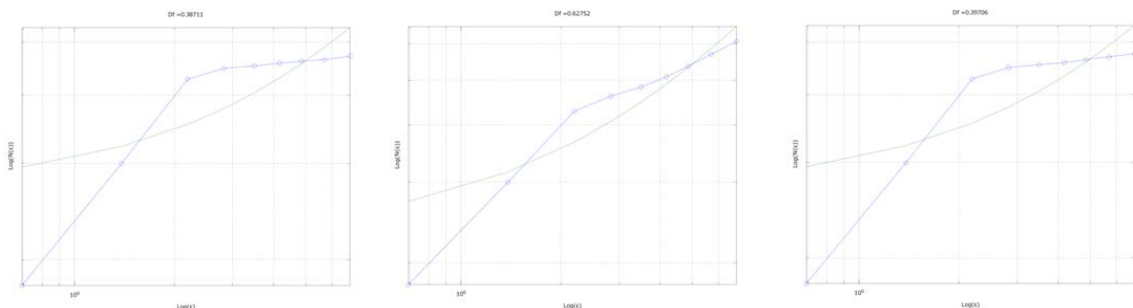
**Nome do gráfico:** Órbitas em pontos



**Figura 48:** Cenário estável, instável e médio, respectivamente, para o gráfico de órbitas em pontos.

**Análise:** Este gráfico é uma transformação do gráfico de órbitas 3D para 2D, onde apenas os valores das variáveis são exibidos, excluindo-se a terceira dimensão que representa a iteração onde os valores das variáveis foram calculados. Sobre este gráfico se extrai a dimensão fractal.

**Nome do gráfico:** Dimensão Fractal ( $\log(\epsilon) \times \log(N(\epsilon))$ )

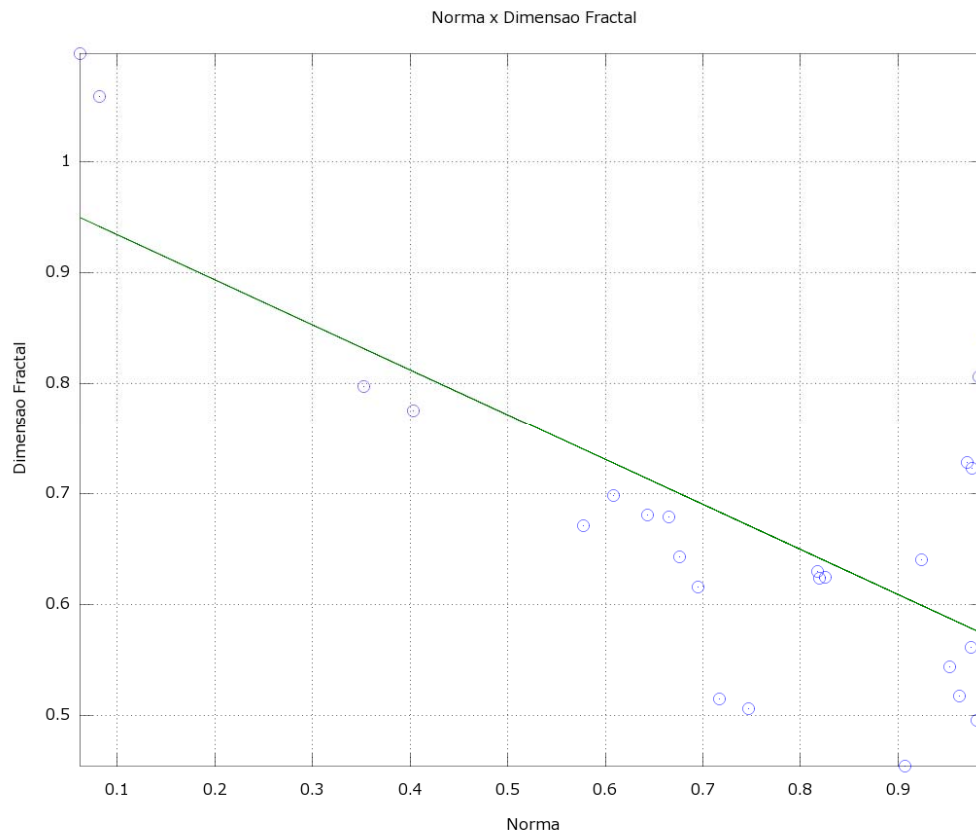


**Figura 49:** Cenário estável, instável e médio, respectivamente, para o gráfico de dimensão fractal.

**Análise:** A análise deste item é equivalente a verificada na configuração Jacobi.

#### 4.1 VALIDAÇÃO DO MODELO

Para a validação do modelo foram criados uma massa de dados com 25 sistemas gerados randomicamente, para os quais se gera um gráfico do tipo Norma versus Dimensão fractal. Neste gráfico é possível verificar se a complexidade da forma está relacionada com a instabilidade do sistema.



**Figura 50: Gráfico do tipo Norma x Dimensão Fractal ilustra a relação entre norma e a dimensão fractal da forma extraída de um subconjunto de órbitas do atrator do sistema (solução). Fonte: Autoria própria.**



## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática está presente em várias áreas, até mesmo na política. Um exemplo disto está na discussão sobre o comprimento do muro de segurança que Israel está construindo na Cisjordânia. Um porta-voz do exército de Israel declarou que a barreira entorno de Jerusalém tem 54 Km de comprimento, mas um geógrafo do Centro de Estudos Palestinos, em Jerusalém, disse que verificou os dados do exército e concluiu que o comprimento do muro é de 72 Km (SZPIRO, 2008).

Segundo Mandelbrot e a teoria dos fractais, a pergunta sobre o comprimento do muro não faz sentido. O comprimento do muro depende da escala do mapa usado: se 1 cm no papel corresponde a 4 Km na realidade (escala 1:400.000), a barreira tem aproximadamente 40 Km de comprimento. Em um mapa mais detalhado, em que 1 cm corresponde a 500 m (escala 1:50.000), mais detalhes do percurso do muro podem ser discernidos e seu comprimento aumenta para 50 Km. Em outra escala de 1:10.000, detalhes ainda menores tornam-se visíveis e o muro se torna bem mais longo.

De fato, o muro dá a volta em torno de casas isoladas, serpenteia campos e evita obstáculos topográficos. Tais detalhes são demasiadamente pequenos para serem incluídos em mapas de grande escala. Portanto, o comprimento do muro é maior do que o comprimento que pode ser indicado até mesmo no mais exato dos mapas.

A única pergunta que faz sentido diz respeito à “dimensão fractal” do muro. Este é um número que, de certa forma, descreve a rugosidade de objetos geométricos. Por exemplo, o litoral da Grã-Bretanha tem dimensão fractal 1,24 e o ainda mais tortuoso litoral da Noruega 1,52. A fronteira entre os estados americanos de Utah e Nevada tem dimensão fractal 1, pois são linhas retas.

A teoria dos fractais tem diversas aplicações sendo que muitas delas ainda são desconhecidas para a maioria das pessoas. No entanto, o fascínio que esta teoria exerce sobre muitas pessoas, por sua beleza inerente e sua complexidade, faz dela uma teoria de descobertas.

Este Trabalho de Conclusão apresenta uma exploração sobre o lado encantador - mas muitas vezes excêntrico da área de Métodos Computacionais, em especial sobre a resolução numérica de problemas matemáticos - e nos convida a

apreciar o prazer que a matemática pode proporcionar a todos nós. Em especial, na descoberta de padrões onde eles parecem não existir.

A geometria do caos, que é como a teoria dos fractais é denominada, revela a forma assim como o significado grego da palavra. Quando a palavra foi usada pela primeira vez em Hesíodo, por volta de 800 AC, significava uma espécie de vazio entre o céu e a terra, do qual emergiam as formas.

Quando conjuntos de dados são observados e um comportamento óbvio/conhecido não pode ser identificado, esses dados são classificados como caóticos. Em geral, esses dados projetam formas que possibilitam identificar um atrator caótico (modelo de comportamento) e bifurcações (transformações radicais de comportamento). Assim, se analisarmos uma seqüência de aproximações de valores numéricos, segundo a ótica do caos, a convergência é um múltiplo topológico sobre o qual fluem os eventos e sua forma é delineada pelos atratores. Os atratores que “puxam” os valores para si, mas não ao longo de uma trajetória direta. Elas precisam seguir o curso do múltiplo topológico a fim de alcançar o atrator.

No contexto deste trabalho os conceitos de atrator e dimensão fractal foram utilizados para investigar a relação entre a instabilidade do problema (representado pela norma) e a instabilidade do algoritmo (representado pelo processo iterativo).

Muitas das conjecturas postuladas durante a trajetória de estudo e implementação do trabalho mostraram-se equivocadas, o que, não podia ser diferente. O processo investigativo está fadado ao erro, uma vez que, apenas errando, pode-se descobrir o que não fazer para que, enfim, consiga-se fazer o que se quer. Em uma de suas célebres frases o psiquiatra suíço Carl Gustav Jung, fundador da psicologia analítica (ou Junguiana), descreve este pensamento: “Erros são, no final das contas, fundamentos da verdade. Se um homem não sabe o que uma coisa é, já é um avanço do conhecimento saber o que ela não é”.

Conforme resultados começaram a ser gerados e analisados, as dúvidas que, teoricamente, deveriam diminuir, acabaram por aumentar, como também há de ser.

A cada resposta que se obtém de um problema, um novo conjunto de perguntas é gerado, no entanto há de se ressaltar que estas novas perguntas só podem ser postuladas após o conhecimento de algo novo.

Através da análise de resultados obtidos pelo modelo proposto fica evidente que a relação entre a norma e o seu impacto no processo de solução não é trivial.

A norma reflete a instabilidade do problema afetando o número de relações que se estabelecem durante o processo de solução de um modo bastante inconstante, como já era esperado, uma vez que tal valor indica, por assim dizer, uma tendência ao caos. Esta influência caótica pode ser verificada no fato de que muitos sistemas com normas semelhantes demonstraram bastante divergência em seus resultados (dimensão fractal).

Há de se salientar que a suposição de que quanto mais próxima a norma estiver do valor “zero” maior será a sua dimensão fractal, em média, e na medida em que a norma aproxima-se do valor “um” a tendência é a sua dimensão fractal diminuir, como pode ser verificado na figura 50, onde a reta em cor verde é a que melhor representa os pontos gerados (obtida por regressão linear).

Embora seja verificada a existência de algumas variações nos resultados dos sistemas cuja norma tende ao valor “um”, onde, em tese, os valores deveriam manter-se mais constantes, não é correto afirmar que a instabilidade do problema, simbolizado pela norma não influencia, ou pouco impacta, no processo de solução.

O correto seria afirmar que a norma, unicamente, não é suficiente para determinar como o sistema irá se comportar, posto que outros fatores também causam impacto, como a tolerância (critério de parada) e o método utilizado para o cálculo da sequência iterativa.

Um fato interessante constatado é que sistemas instáveis diferem-se dos estáveis no comportamento de suas órbitas, sendo que as órbitas dos sistemas instáveis não são circulares como as órbitas verificadas em sistemas estáveis, contudo o número de relações (iterações) das diferentes órbitas dentro da bacia de atração das raízes, em ambos os casos é variável para sistemas com normas semelhantes.

Conclui-se, então, que o modelo para exploração visual desenvolvido pode ser utilizado na investigação sobre o impacto da instabilidade numérica no processo de solução de sistemas de equações, pois possibilita a identificação de padrões e diferenças entre sistemas de diferentes normas. Além disto, é possível verificar as bordas da bacia do atrator (raiz) bastando realizar uma série de ajustes na malha de pontos calculados, até que estes deixem de convergir.

Quanto aos objetivos específicos propostos neste trabalho pode-se dizer que a tentativa de expor uma relação entre a instabilidade do problema e seu impacto no processo de solução não pôde ser expressa com acurácia pela dimensão fractal

comum, uma vez que os comportamentos verificados por sistemas com normas semelhantes parecem variar de uma forma não previsível. Estima-se que, em razão destes sistemas possuírem um número bastante variável de pontos, mas manterem um certo padrão em sua “forma” a dimensão fractal multiescala possa ser utilizada para tentar averiguar este padrão, uma vez que esta abordagem apresenta uma série de valores que podem ser analisados e não apenas um como é o caso da dimensão fractal comum. Nesta abordagem existe também a vantagem de que os valores obtidos são menos dependentes do conjunto de dados utilizados para o cálculo (PLOTZE; BRUNO, 2007). Esta abordagem havia sido prevista para este trabalho, porém, em razão de uma série de fatores, dentre eles, a própria compreensão da teoria empregada nesta abordagem, demanda uma quantidade de tempo que não seria suficiente para a realização de todos os objetivos previstos neste trabalho, por este motivo optou-se por realizar a pesquisa e o desenvolvimento do modelo com dimensão fractal multiescala em trabalhos futuros.

## REFERÊNCIAS

BACKES, André Ricardo; BRUNO, Odemir Martinez. Técnicas de estimativa da Dimensão Fractal: Um Estudo Comparativo. **INFOCOMP - Journal of Computer Science**, Lavras, v. 4, n. 3, p. 50-58, set. 2005.

BORSSOI, J.A. **Geometria Fractal: alguns conceitos e aplicações**. 2005. 39p. Trabalho de conclusão de Curso (Matemática) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2005.

CLAUDIO, Dalcídio Moraes; MARINS, Jussara Maria. **Cálculo numérico computacional**: teoria e prática: algoritmos em pseudo-linguagem, indicações de Software matemático, 150 exercícios resolvidos, exercícios propostos. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2000. 464 p.

COELHO, R.C.; COSTA, Luciano da Fontoura. The Box- Counting Fractal. Dimension: Does it provide an Accurate Subsidy for Experimental Shape Characterization? If So, How to Use It?”. In: VIII Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens, 1995, São Carlos. **Anais do Sibgrapi '95**. São Carlos: Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da USP, 1995, p. 183-191.

COSTA, Luciano da Fontoura.; CESAR JÚNIOR, Roberto Marcondes. **Shape analysis and classification**: theory and practice. Boca Raton: CRC Press, 2001. 659 p. (Image processing series).

HUEBNER, Kennet H.; EARL A. Thornton. **The finite element method for engineers**. 2nd. ed. Nova York: John Wiley & Sons. 1982, 623p.

JÚDICE, Joaquim João; PATRÍCIO, João Manuel. **Sistemas de equações lineares**. Coimbra: Universidade de Coimbra – Departamento de Matemática, 240 p. 1996. Disponível em <<http://www.co.it.pt/~judice/Articles/SistEqLin.pdf>> Acesso em: 08 out. 2011.

MANDELBROT, B.B. **The Fractal Geometry of Nature**: Updated and Augmented. New York: W. H. Freeman and Company, 1983. 468 p.

PLOTZE, Rodrigo de Oliveira; BRUNO, Odemir Martínez. Análise de Formas e Reconhecimento de Padrões por meio da Assinatura Fractal Multiescala. **INFOCOMP - Journal of Computer Science**, Lavras, v. 6, n. 2, p. 91-100. 2007.

PLOTZE, Rodrigo de Oliveira; BRUNO, Odemir Martínez; FALVO, Maurício. Identificação de Espécies Arbóreas através da Dimensão Fractal. In: I WORKSHOP DE TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO APLICADA AO MEIO AMBIENTE, 1., 2003, Itajaí. **Anais...** Itajaí: CBCOMP, 2003.

SANTOS, Lúcio Tunes. Sistemas não Lineares e Fractais. **Revista Matemática Universitária (RMU)**, Rio de Janeiro, v. 15, p. 102-116, dez. 1993.

SEDIVY et. al. Fractal Analysis: An Objective Method for Identifying Atypical Nuclei in Dysplastic Lesions of the Cervix Uteri. **Gynecologic Oncology - Academic press**, v. 75, n. 1, p. 78-83, Oct. 1999.

SERRA, Celso Penteado. **Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos**. 20. ed. Curitiba: Editora Universitária Champagnat, 1997. 190 p.

SERRA, J. **Image Analysis and Mathematical Morphology**. v. 1. London: Academic Press, 1982. 610 p.

SOUSA, E. P. M. **Identificação de Correlações usando a Teoria dos Fractais**. 2006. 164 p. Tese (Doutorado em Ciências de Computação e Matemática Computacional)-Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

SPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; SILVA, Luiz Henry Monken e . **Cálculo Numérico: características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos**. 1. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003. 354 p.

SZPIRO, George G. **A VIDA SECRETA DOS NUMEROS**. 1. ed. Brasil: DIFEL, 2008. 272 p.

TOBLER, W. R. A. Computer Movie Simulating Urban Growth in the Detroit Region. **Economic Geography**, Worcester, v.46, Supplement: Proceedings. International Geographical Union. Commission on Quantitative Methods, p. 234-240, Jun. 1970.

YBC7289. Tablet Babilônico que estima um valor aproximado para a raiz de 2. Disponível em: <<http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath/tablets/YBC7289.htm>>. Acesso em: 10 out. 2011.

## BIBLIOGRAFIA

- ATTRACTOR. In: WIKIPEDIA. 2011. Disponível em: <<http://en.wikipedia.org/wiki/Attractor>>. Acesso em: 10 out. 2011.
- BACKES, André Ricardo; BRUNO, Odemir Martinez. Técnicas de estimativa da Dimensão Fractal: Um Estudo Comparativo. **INFOCOMP - Journal of Computer Science**, Lavras, v. 4, n. 3, p. 50-58, set. 2005.
- BORSSOI, J.A. **Geometria Fractal: alguns conceitos e aplicações**. 2005. 39p. Trabalho de conclusão de Curso (Matemática) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2005.
- CLAUDIO, Dalcídio Moraes; MARINS, Jussara Maria. **Cálculo numérico computacional: teoria e prática**: algoritmos em pseudo-linguagem, indicações de Software matemático, 150 exercícios resolvidos, exercícios propostos. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2000. 464 p.
- COELHO, R.C.; COSTA, Luciano da Fontoura. The Box- Counting Fractal. Dimension: Does it provide an Accurate Subsidy for Experimental Shape Characterization? If So, How to Use It?”. In: VIII Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens, 1995, São Carlos. **Anais do Sibgrapi '95**. São Carlos: Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da USP, 1995, p. 183-191.
- COSTA, Luciano da Fontoura. Multidimensional scale-space shape analysis. In: International Workshop on Synthetic-Natural Hybrid Coding and Three Dimensional Imaging. 1999, Santorini-Greece. **Proceedings**. Santorini-Greece, 1999. p. 214-217.
- COSTA, Luciano da Fontoura; CESAR JÚNIOR, Roberto Marcondes. **Shape analysis and classification**: theory and practice. Boca Raton: CRC Press, 2001. 659 p. (Image processing series).
- FRACTAL. In: WIKIPEDIA. 2011. Disponível em: <<http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal>>. Acesso em: 10 out. 2011.
- FRACTAL Dimension. In: WIKIPEDIA. 2011. Disponível em: <[http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal\\_dimension](http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal_dimension)>. Acesso em: 10 out. 2011.
- HILDEBRAND, F. B. **Introduction to Numerical Analysis**. 2nd. ed. Chemsford: Courier Dover Publications, 1987. 669 p.
- HUEBNER, Kennet H.; EARL A. Thornton. **The finite element method for engineers**. 2nd. ed. Nova York: John Wiley & Sons. 1982, 623p.
- JÚDICE, Joaquim João; PATRÍCIO, João Manuel. **Sistemas de equações lineares**. Coimbra: Universidade de Coimbra – Departamento de Matemática, 240 p. 1996. Disponível em <<http://www.co.it.pt/~judice/Articles/SistEqLin.pdf>>. Acesso em: 08 out. 2011.

LEADER, Jeffery J. **Numerical Analysis and Scientific Computation**. 1st. ed., Boston: Addison Wesley, 2004. 608 p.

LORENZ Attractor. In: WIKIPEDIA. 2011. Disponível em: <[http://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz\\_attractor](http://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_attractor)>. Acesso em: 10 out. 2011.

MANDELBROT, B.B. **The Fractal Geometry of Nature**: Updated and Augmented. New York: W. H. Freeman and Company, 1983. 468 p.

MANDELBROT, B. B. **Objectos fractais**: Forma, Acaso e Dimensão. 1. ed. Lisboa: Gradiva Publicações LTDA, 1991. 296 p.

PORTELA, Fernando. **Glossário de Dinâmica Não-Linear**.

Disponível em:

<[http://www.abpbrasil.org.br/departamentos/coordenadores/coordenador/noticias/imagens/glossario\\_de\\_dinamica\\_ao\\_linear.pdf](http://www.abpbrasil.org.br/departamentos/coordenadores/coordenador/noticias/imagens/glossario_de_dinamica_ao_linear.pdf)>. Acesso em: 09 outubro 2011.

PLOTZE, Rodrigo de Oliveira; BRUNO, Odemir Martínez; FALVO, Maurício. Identificação de Espécies Arbóreas através da Dimensão Fractal. In: I WORKSHOP DE TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO APLICADA AO MEIO AMBIENTE, 1., 2003, Itajaí. **Anais...** Itajaí: CBCOMP, 2003.

PLOTZE, Rodrigo de Oliveira; BRUNO, Odemir Martínez; FALVO, Maurício. Identificação de Espécies Arbóreas através da Dimensão Fractal. In: I WORKSHOP DE TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO APLICADA AO MEIO AMBIENTE, 1., 2003, Itajaí. **Anais...** Itajaí: CBCOMP, 2003.

PRISMA à luz da física. **Retratos de fase**. Apresenta textos sobre mecânica quântica, geometria fractal e a origem do universo. Disponível em: <<http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo2/topico1.php>>. Acesso em: 10 out. 2011.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2. ed. São Paulo: MAKRON Books, 1996. 406 p.

SANTOS, Lúcio Tunes. Sistemas não Lineares e Fractais. **Revista Matemática Universitária (RMU)**, Rio de Janeiro, v. 15, p. 102-116, dez. 1993.

SEDIVY et. al. Fractal Analysis: An Objective Method for Identifying Atypical Nuclei in Dysplastic Lesions of the Cervix Uteri. **Gynecologic Oncology - Academic press**, v. 75, n. 1, p. 78-83, Oct. 1999.

SERRA, Celso Penteado. **Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos**. 20. ed. Curitiba: Editora Universitária Champagnat, 1997. 190 p.

SERRA, J. **Image Analysis and Mathematical Morphology**. v. 1. London: Academic Press, 1982. 610 p.



SOUSA, E. P. M. **Identificação de Correlações usando a Teoria dos Fractais**. 2006. 164 p. Tese (Doutorado em Ciências de Computação e Matemática Computacional)-Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

SPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; SILVA, Luiz Henry Monken e . **Cálculo Numérico**: características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos. 1. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003. 354 p.

SZPIRO, George G. **A VIDA SECRETA DOS NUMEROS**. 1. ed. Brasil: DIFEL, 2008. 272 p.

TEORIA do caos. In: WIKIPEDIA. 2011. Disponível em: <[http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria\\_do\\_caos](http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_do_caos)>. Acesso em: 10 out. 2011.

TOMÉ, Francisco José Sanches. CAOS E MÉTODOS NÃO LINEARES NOS MERCADOS FINANCEIROS. **Revista Millenium**, n. 28, p. 104-148, out. 2003. Disponível em: <<http://www.ipv.pt/millenium/Millenium28/12.pdf>>. Acesso em 28/06/2010.

YBC7289. Tablet Babilônico que estima um valor aproximado para a raiz de 2. Disponível em: <<http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath/tablets/YBC7289.htm>>. Acesso em: 10 out. 2011.

**ANEXO A** – Mapa Mental. Em anexo no.rar que contém este .pdf.  
**ANEXO B** – Artigo. Em anexo no .rar que contém este .pdf.