

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECATRÔNICA**

PEDRO GUILHERME ANDRES MACHADO

**ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DA RESISTÊNCIA DE MOLARES COM A  
UTILIZAÇÃO DE PINOS TRANSFIXADOS HORIZONTALMENTE**

PORTO ALEGRE

2008

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECATRÔNICA**

**PEDRO GUILHERME ANDRES MACHADO**

**ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DA RESISTÊNCIA DE MOLARES COM A  
UTILIZAÇÃO DE PINOS TRANSFIXADOS HORIZONTALMENTE**

Dissertação apresentada ao Programa de Graduação em Engenharia da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Isaac Newton. L.Silva

PORTO ALEGRE

2008

*Dedico a concretização deste grande trabalho, com totalidade aos meus pais que sempre me deram apoio e incentivo para estudar e sempre estudar. Graças a Deus consegui, e agradeço a eles, Obrigado!*

*Não há nada bom nem mau a não ser estas duas coisas: a sabedoria que é um bem e a ignorância que é um mal.*

*Platão*

## AGRADECIMENTOS

*Agradeço a Deus primeiramente por estar realizando este sonho.*

*Agradeço à minha família por ter propiciado a realização deste sonho de uma forma completa.*

*Agradeço a minha namorada Claudia Bauer por me ajudar nos momentos de angústia e de dificuldade.*

*Agradeço ao Prof. Dr. Isaac Newton L.Silva, por toda a orientação e apoio doados ao longo da realização deste trabalho.*

*Agradeço ao Prof. Dr. Luis Henrique da Faculdade de Odontologia pela grande ajuda e orientação também ao longo de toda parte odontológica do trabalho.*

*Agradeço aos colegas da faculdade que sempre me apoiaram e também estudaram em alguns momentos complicados do curso.*

*Agradeço também aos meus grandes amigos que sempre estiveram juntos em momentos de alegria e momentos de tristezas.*

*Agradeço ao meu amigo e colega Tiago Falci por ter me ajudado a complementar os estudos de montagem da estrutura dentária.*

*Agradeço aos colegas de trabalho do setor de CAD da DHB Indústria & Comércio S.A pelo apoio na realização do trabalho.*

*Agradeço ao técnico mecatrônico Liangrid Lutiani da Silva do Laboratório CIMM pela total atenção e ajuda doada na realização da malha de elementos finitos.*

*Agradeço ao meu chefe Rafael De Pizzol da empresa DHB Indústria & Comércio S.A pela oportunidade de trabalho e aprendizado com análise em CAE.*

## RESUMO

Este trabalho tem por objetivo analisar o comportamento em termos de níveis de tensão Von Misses através da ferramenta Elementos Finitos com um modelo dentário 3D, denominado um dente molar tratado endodonticamente com modelos de resinas e pinos distintos. O modelo dentário possui alterações que são: Tratamento Endodonto (preparo MOD), com a restauração sendo feita através de resina composta (dois modelos de resina) com a transfixação horizontal de um pino (dois modelos de pinos) a fim de prover maior resistência ao dente. A análise completa está dividida em quatro grupos, a fim de que pudesse haver a variação nas configurações tanto em tipo de resina quanto em tipo de pino para relacionar à resistência adicionada a estrutura com cada tipo de configuração e comparar um a um. É aplicado um conjunto de três forças com valor de 200N na parte superior do dente, definidos como os pontos de maior concentração de tensões quando sujeito a ação mastigatória. Os resultados mostraram que a estrutura dentária submetida a uma restauração com resina FITEK Z250 transfixado horizontalmente de um pino de fibra de vidro e zircônio possui um valor de tensão Von Misses de 45,00 MPa e 44,69Mpa respectivamente e que a estrutura dentária submetida a uma restauração com a resina Flow Revolution transfixado horizontalmente de um pino de fibra de vidro e zircônio possui um valor de tensão Von Misses de 34,76 Mpa e 34,25 Mpa respectivamente.

**Palavras-Chave:** Análise por Elementos Finitos, Modelo dentário 3D, Restauração com Pino Transfixado Horizontalmente.

## ABSTRACT

This study aims to examine the behavior in terms of levels of tension Von Misses tool by finite elements with a dental model 3D, called a molar tooth treated with models to resins endodontically and distinct posts. The dental model has alterations that are: Endodontic treatment (MOD preparation), with the restoration being made through composed resin (two resin models) with the horizontal transfixation of a post (two models of post) in order to provide greater resistance to the tooth. The complete analysis is divided in four groups, so that it could have the variation in the configurations in such a way in type of resin how much in type of post to relate the addiction of resistance to structure with each type of configuration and to compare one by one. A set of three forces with value of 200N in the superior part of the tooth is applied, defined as the points of bigger concentration of tensions when subject to chew action. The results had shown that the dental structure submitted to a restoration with resin FITEK transfixed Z250 horizontally of a fiber glass pin and zirconium pin a value of tension Von Misses 45,00 Mpa of 44,69 Mpa respectively and that the dental structure submitted to a restoration with the resin Flow transfixed Revolution horizontally of a fiber glass pin and zirconium pin a value of tension Von Misses 34,76 MPa of 34,25 Mpa respectively.

**Key-Words:** Finite Element Analyses, Dental Model 3D, Restoration with Transfixed Pin Horizontally.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Processo Evolutivo MEF.....	19
Figura 2 – Método do Sistema Discreto Padrão .....	21
Figura 3 – Diagrama de corpo livre elemento Mola.....	22
Figura 4 – Diagrama de corpo livre elemento barra .....	25
Figura 5 – Sistemas de Coordenadas.....	27
Figura 6 – Transformação Sistema Local Global .....	27
Figura 7 – Diagrama de Corpo livre elemento viga.....	31
Figura 8 – Graus de liberdade Elemento Viga.....	31
Figura 9 – Diagrama de Corpo livre à torção .....	33
Figura 10 – Transformação Sistema Local - Global.....	34
Figura 11 – 5 Passos na determinação da Matriz de Rigidez .....	37
Figura 12 – Elemento Tetraédrico .....	39
Figura 13 – Elemento Tetraédrico Parabólico .....	40
Figura 14 – Elemento Hexaédrico Linear.....	41
Figura 15 – Geometria CAD: Configurações Distintas, A - Dentina, B - Resina, C – Pino.....	45
Figura 16 – Condições de Contorno: Aplicação da Força .....	47
Figura 17 – Condições de Contorno: Restrição do Dente .....	48
Figura 18 – Condições de Contorno: Geração da Malha.....	49
Figura 19 – Adesivo Restaurador Não Incluso.....	50
Figura 20 – Representação Estado Triaxial de Tensões .....	52
Figura 21 – Concentração de Tensões Configuração A .....	54
Figura 22 – Concentração de Tensões Configuração A sem coroa .....	54
Figura 23 – Concentração de Tensões Configuração somente a Coroa.....	55
Figura 24 – Concentração de Tensões Configuração B.....	56
Figura 25 – Concentração de Tensões Configuração B sem Coroa.....	56
Figura 26 – Concentração de Tensões Configuração B somente a Coroa .....	57
Figura 27 – Concentração de Tensões Configuração C.....	58
Figura 28 – Concentração de Tensões Configuração C sem Coroa.....	58

Figura 29 – Concentração de Tensões Configuração C somente a Coroa.....	<b>59</b>
Figura 30 – Concentração de Tensões Configuração D .....	<b>60</b>
Figura 31 – Concentração de Tensões Configuração D sem Coroa .....	<b>60</b>
Figura 32 – Concentração de Tensões Configuração D somente Coroa.....	<b>61</b>

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 – Propriedades Mecânicas dos Materiais.....	<b>46</b>
Tabela 2 – Resultado Tensão Von Misses.....	<b>53</b>

## LISTA DE EQUAÇÕES

<i>Elemento Mola: Lei de Hooke</i>	(1)
<i>Elemento Mola: Diagrama de Corpo livre nó 1</i>	(2)
<i>Elemento Mola: Diagrama de Corpo livre nó 2</i>	(3)
<i>Elemento Mola: Forças-Deslocamentos forma Matricial</i>	(4)
<i>Elemento Mola: Forças-Deslocamentos generalizada</i>	(5)
<i>Elemento Mola: Dimensão da Matriz de Rigidez</i>	(6)
<i>Elemento Barra: Tensão Normal atuante na Barra</i>	(7)
<i>Elemento Barra: Deformação Linear Média na Barra</i>	(8)
<i>Elemento Barra: Constante de Proporcionalidade</i>	(9)
<i>Elemento Barra: Forças-Deslocamentos</i>	(10)
<i>Elemento Barra: Diagrama de Corpo livre nó 1</i>	(11)
<i>Elemento Barra: Diagrama de Corpo livre nó 2</i>	(12)
<i>Elemento Barra: Forças-Deslocamentos forma Matricial</i>	(13)
<i>Elemento Barra: Forças-Deslocamentos generalizada</i>	(14)
<i>Elemento Barra: Forças no Sistema Global</i>	(15)
<i>Elemento Barra: Forças no Sistema Global forma Matricial</i>	(16)
<i>Elemento Barra: Forças no Sistema Global generalizada</i>	(17)
<i>Elemento Barra: Deslocamento no Sistema Global forma Matricial</i>	(18)
<i>Elemento Barra: Deslocamento no Sistema Global generalizada</i>	(19)
<i>Elemento Barra: Cálculo Matriz de Transformação</i>	(20)
<i>Elemento Barra: Cálculo Matriz de Transformação</i>	(21)
<i>Elemento Barra: Matriz de Rigidez Sistema Global</i>	(22)
<i>Elemento Barra: Matriz de Rigidez Sistema Global forma Matricial</i>	(23)
<i>Elemento Viga: Forças-Deslocamentos forma Matricial</i>	(24)
<i>Elemento Viga: Matriz de Rigidez</i>	(25)
<i>Elemento Viga: Matriz de Rigidez à Flexão</i>	(26)
<i>Elemento Viga: Dimensão Matriz de Rigidez à Flexão</i>	(27)
<i>Elemento Viga: Graus de liberdade em (1) e (3)</i>	(28)
<i>Elemento Viga: Graus de liberdade em (2) e (4)</i>	(29)
<i>Elemento Viga: Matriz de Rigidez completa à Flexão</i>	(30)
<i>Elemento Viga: Momento torsional</i>	(31)
<i>Elemento Viga: Diagrama de corpo livre</i>	(32)

<i>Elemento Viga: Diagrama de corpo livre em um ponto</i>	(33)
<i>Elemento Viga: Matriz de Rigidez à Torção</i>	(34)
<i>Elemento Viga: Matriz de Rigidez completa à Torção</i>	(35)
<i>Elemento Viga: Contribuição Axial e à Flexão</i>	(36)
<i>Elemento Viga: Matriz de Transformação Sistema Global</i>	(37)
<i>Elemento Viga: Matriz de Transformação Sistema Global generalizada</i>	(38)
<i>Elemento Viga: Matriz de Rigidez Completa Sistema Global</i>	(39)
<i>Elemento Viga: Considerações para o Cálculo da Matriz</i>	(40)
<i>Elemento de Tensão Plana Triangular: Dimensão Matriz de Rigidez</i>	(41)
<i>Elemento de Tensão Plana Retangular: Dimensão Matriz de Rigidez</i>	(42)
<i>Elemento Sólido Tetraédrico Linear: Dimensão Matriz de Rigidez</i>	(43)
<i>Elemento Sólido Tetraédrico Parabólico: Dimensão Matriz de Rigidez</i>	(44)
<i>Elemento Sólido Hexaédrico Linear: Dimensão Matriz de Rigidez</i>	(45)
<i>Tensão Von Misses</i>	(46)

## LISTA DE ABREVIATURAS

*CAD – Computer Aided Designer*

*MEF – Método dos Elementos Finitos*

*MOD – Médio Oclusal-Distal*

*N – Newton*

*PROE – Pro Engineer*

*$\mu\text{m}$  – Micrômetro*

$\sigma$  – Tensão Von Misses

Sx – Tensão Normal Plano X

Sy – Tensão Normal Plano Y

Sxy – Tensão de Cisalhamento

## SUMÁRIO

<b>1 – INTRODUÇÃO.....</b>	<b>15</b>
<b>2 – O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....</b>	<b>17</b>
2.1 – HISTÓRICO GERAL SOBRE O MÉTODO .....	17
2.2 – A METODOLOGIA DO SISTEMA DISCRETO PADRÃO .....	19
2.3 – TIPOS DE ELEMENTOS.....	21
2.3.1 – Elemento Mola .....	22
2.3.2 – Elemento Barra.....	24
<b>2.3.2.1 – Sistemas de Coordenadas Local e Global.....</b>	<b>26</b>
2.3.3 – Elemento Viga .....	29
<b>2.3.3.1 – Rigidez Axial .....</b>	<b>30</b>
<b>2.3.3.2 – Rigidez à Flexão .....</b>	<b>30</b>
<b>2.3.3.3 – Rigidez à Torção .....</b>	<b>32</b>
<b>2.3.3.4 – Sistemas Local e Global .....</b>	<b>34</b>
2.3.4 – Elementos Bidimensionais e Tridimensionais.....	35
<b>2.3.4.1 – Matriz de Rigidez para Qualquer Elemento Finito Bi e Tridimensional.....</b>	<b>36</b>
<b>2.3.4.2 – Elemento De Tensão Plana Triangular .....</b>	<b>38</b>
<b>2.3.4.3 - Elemento De Tensão Plana Retangular.....</b>	<b>38</b>
<b>2.3.4.4 – Elemento Sólido Tetraédrico Linear .....</b>	<b>39</b>
<b>2.3.4.5 – Elemento Sólido Tetraédrico Parabólico.....</b>	<b>40</b>
<b>2.3.4.6 – Elemento Sólido Hexaédrico Linear .....</b>	<b>41</b>
2.4 – COMO O MÉTODO DESENVOLVE A SOLUÇÃO .....	42
<b>3 - ANÁLISE ESTRUTURA DENTÁRIA .....</b>	<b>44</b>
3.1 – PRÉ-PROCESSAMENTO .....	44
3.1.1 – Geometria CAD.....	44
3.1.2 – Definição das Propriedades dos Materiais.....	46
3.1.3 – Condições de Contorno .....	47
3.1.4 – Geração da Malha.....	48
3.1.5 – Limitação da Malha .....	49

3.2 – PROCESSAMENTO.....	51
3.3 – PÓS-PROCESSAMENTO .....	51
3.3.1 – Critério de Von Misses .....	51
3.3.2 - Resultados .....	53
<b>4 – CONCLUSÃO .....</b>	<b>62</b>
<b>5 – DISCUSSÃO .....</b>	<b>63</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>64</b>

## 1 – INTRODUÇÃO

Há algum tempo os pesquisadores da área da engenharia e informática vem utilizando modelos e ambientes virtuais, chamados de análise por elementos finitos, para fazer simulações e testar de maneira progressiva a resistência, e a distribuição de tensões em peças que fazem parte de muitas máquinas que utilizamos no nosso cotidiano. Devido ao alto grau de precisão desta técnica de análise, muitos profissionais da saúde vêm aplicando os elementos finitos nas suas pesquisas para tentar solucionar problemas mecânicos, dividindo o elemento problema em inúmeros, menores e mais simples elementos, elementos finitos propriamente ditos, os quais estão dispostos no formato de uma malha (*mesh*), onde as variáveis analisadas são interpoladas com o uso de funções matemáticas de forma. (REGÊNIO, 2006)

Segundo (FAUSTO, 2007) a terapia endodôntica não deve ser considerada completa até a realização de uma restauração definitiva a qual deve prover resistência, estética e prevenir a micro-infiltração entre material restaurador e estrutura dental. Inúmeros processos evolutivos vêm ocorrendo ao logo do tempo provendo novas soluções e técnicas na tentativa de manter a resistência de um dente hígido, mantendo-o estruturalmente saudável. O desenvolvimento dos compósitos resinosos permitiu o desenvolvimento da técnica adesiva, aumentando assim a resistência da estrutura dental enfraquecida pela remoção de importantes estruturas de suporte durante a terapia endodôntica. Porém, a resistência de união dos compósitos resinosos tem uma vida útil a qual vai sendo diminuída à medida que ocorre o processo de fadiga mecânica sobre a estrutura dental. Assim a utilização de estruturas de reforço tais como pinos de fibra de vidro juntamente com a resina composta e sistema adesivo parece ser uma técnica promissora (BELTRÃO, 2006). Outro avanço tecnológico foi o desenvolvimento dos pinos flexíveis, tais como os de fibra de vidro, que, além de estéticos, proporcionam maior proteção à fratura ao remanescente dentinário quando comparado ao sistema rígido dos pinos metálicos. Isso se deve ao seu módulo de elasticidade ser próximo ao da dentina.

Este trabalho tem por objetivo aliar a técnica de análise por elementos finitos para avaliar o comportamento estrutural de uma estrutura dentária (dente) pré-molar inferior, submetido a forças mastigatórias. Tendo em vista as afirmações anteriores o procedimento é avaliar o dente, ocorrido de um preparo cavitário MOD restaurado com adesivo restaurador e resina composta, influído pela transfixação de um pino entre as paredes vestibular e lingual.

A afirmação é que com a inclusão de pinos transfixados horizontalmente, com a restauração do preparo cavitário MOD feito através de resina e adesivo restaurador, promova maior resistência mecânica ao dente similar a resistência de um dente sem tratamento algum (dente hígido).

## 2 – O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

### 2.1 – HISTÓRICO GERAL SOBRE O MÉTODO

Antigamente a limitação de recursos computacionais era imensa que para tentar descrever o comportamento do sistema complexo era algo muito embaraçoso. Necessitava-se então subdividir estes “ditos sistemas complexos” em pequenos elementos, no qual poderiam ser descritos matematicamente, um a um. Posteriormente a esta análise, os elementos poderiam ser realocados como um sistema completo e a partir disto seria possível a observação de tais comportamentos dentro de um todo. Isso complementa a idéia de que os sistemas são coordenados por certos domínios, ou seja, no momento onde um determinado sistema é regido por um número finito de elementos corretamente definidos, é chamado de domínio discreto. Por outro lado quando há necessidade de manipulação matemática através de equacionamento diferencial para obter a correta solução em um número infinito de elementos, este sistema esta sob domínio contínuo.

Como já descrito, na resolução de certos problemas existe a necessidade da manipulação matemática. Sistemas de natureza discreta onde há um número definido de elementos, a capacidade de resolução é total, aliado ao avanço computacional. Para sistemas de natureza contínua a dificuldade aumenta devido à capacidade computacional ser finita e o número de elementos do sistema ser infinito, havendo assim a dita necessidade de manipular matematicamente na tentativa de obter a correta e mais aproximada resposta. Esse processo de transformação de um sistema contínuo para um sistema discreto através da matemática é definido como o “processo de discretização do sistema”. Era o início de uma longa discussão entre Engenheiros e Matemáticos de como seria a melhor forma de aplicar o conceito de discretização dos sistemas complexos, onde cada parte interessada tinha seu próprio ponto de vista. Matemáticos desenvolviam técnicas para governar o sistema onde utilizavam equações diferenciais como base para o propósito e também métodos de resíduos ponderados, e princípios variacionais. Em outro tipo de ênfase, Engenheiros avaliavam a analogia existente entre os elementos do sistema discreto com finitas porções de elementos do sistema contínuo.

A primeira definição de “polinômios de interpolação” ou *Piecewise Continuous* definida sobre um certo domínio teve seu surgimento no ano de 1943 em uma aplicação puramente matemática de *COURANT*. Com fortes estudos sobre domínios triangulares do

sistema, *COURANT* baseou-se muito neste conceito para agrupar elementos triangulares e aplicar o princípio do mínimo potencial de energia no estudo de torção de torção de eixo.

No ano de 1959 *GREENSTADT* resumiu a discretização como “células envoltas de pontos”, ou seja, imaginara que a solução para certo domínio pudera ser repartida em diversos subdomínios. Enfatizando este pensamento, escrevera uma teoria onde descobriu um procedimento para representação de alguma função desconhecida através de uma série de funções cada uma associada com uma célula de pontos. Após atribuir funções aproximadas e avaliar o princípio variacional para cada célula, utilizara também o preceito da continuidade para vincular equações para todas as células. Assim automaticamente reduzira o problema contínuo para um problema discreto, e essa era a teoria que continha as idéias essenciais e fundamentais que servem como fundamento teórico inicial em termos matemáticos na teoria do MEF.

No ponto de vista de aplicação de Engenharia, *HRENIKOFF*, na década de 40 apresentara uma solução para um tipo de problema elástico utilizando o “método do trabalho estrutural” ou *framework method*. Posterior a estes ideais, dentro de um mesmo contexto, *ARGYRIS e TURNER et al.* mostraram mais diretamente que substituindo algumas propriedades poderia produzir muito mais efeito que o trabalho especificamente estrutural, conduzindo de uma maneira simplificada. Assim começara a determinação das matrizes de rigidez de alguns dos elementos utilizados atualmente. Assim na comunidade da Engenharia iniciara a surgir o termo “elementos finitos”. A primeira teoria oficial sobre o tema teve como autor *CLOUGH* que descreveu a “Metodologia Padrão Aplicável a Sistemas Discretos”. Conceitualmente esta publicação tinha dois propósitos, um da aplicação direta da metodologia e outra era o ponto de vista computacional. Ambas as idéias eram de extrema importância, ou seja, a primeira permitira aperfeiçoar o entendimento de como aplicar a metodologia, e a outra idéia desenvolvera procedimentos computacionais padrões para a aplicação nos mais diversos tipos de problemas.

Sintetizando o histórico sobre o método, desde os anos 60 matemáticos trabalham para estabelecer e aperfeiçoar erros, contornos e critérios de convergência para aproximação dos elementos finitos. Enquanto que Engenheiros aplicavam diretamente os conceitos na área de mecânica dos sólidos, transferência de calor e outras áreas afins. Pode-se a partir deste salto inicial no uso da ferramenta, perceber diversos progressos em ambas as visões, tanto Matemática quanto de Engenharia. Atualmente na resolução de qualquer problema em uma área determinada, seja ela Engenharia ou não, é imprescindível a união de ambas as visões.

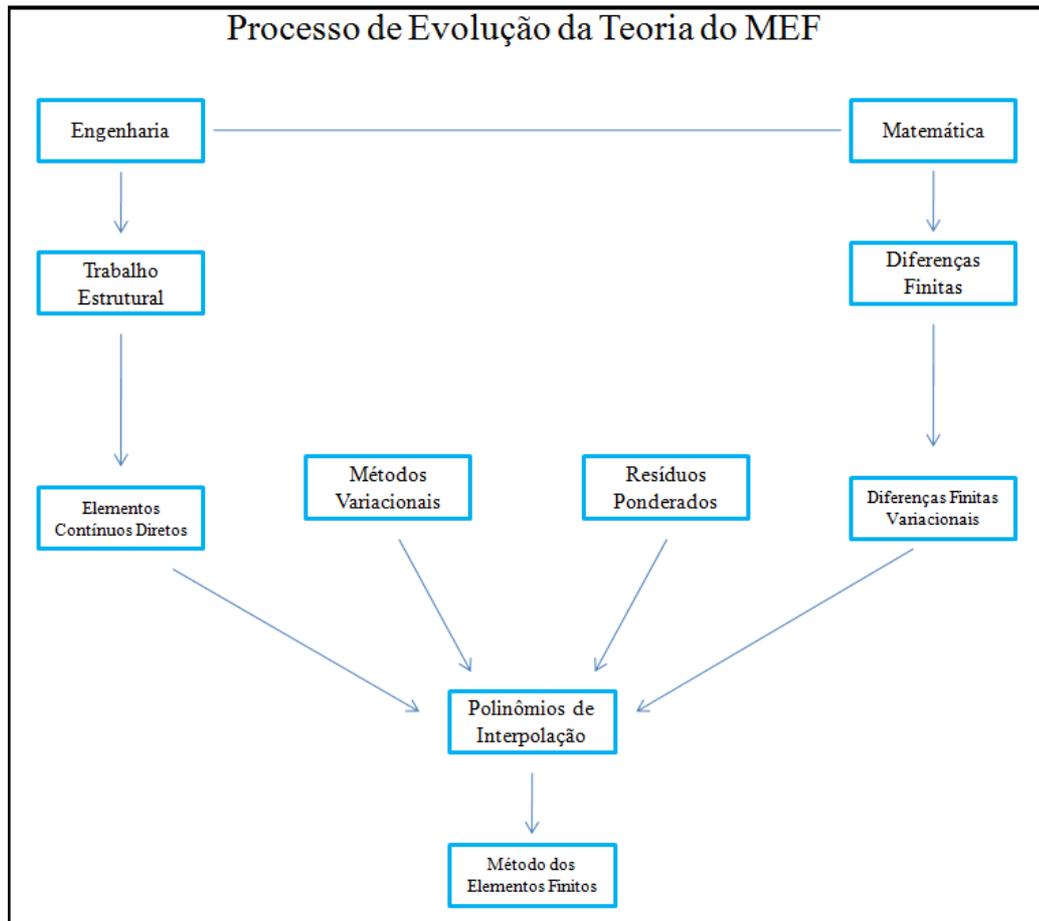


Figura 1 – Processo Evolutivo MEF  
Fonte: Zienkiwicz

## 2.2 – A METODOLOGIA DO SISTEMA DISCRETO PADRÃO

Ao iniciar o conceito de metodologia padrão aplicável a sistemas discretos, é de necessidade entender o que a originou. Ao tratar-se particularmente em casos estruturais, onde no desenvolvimento de uma solução que garanta que a estrutura em questão não esteja sujeita a nenhum tipo de falha, além do conhecimento do comportamento físico do sistema, da modelagem matemática ideal, o principal é identificar cada ponto relevante do sistema para compor inúmeras hipóteses de comportamento que este sistema possa vir a ter.

Para descrever a solução de um problema estrutural em Engenharia é definido um roteiro onde a estrutura idealizada possa apresentar uma boa interpretação dos resultados. Primeiramente é representada a estrutura em forma de modelo de análise para que posteriormente a isto possa ser aplicado o devido equacionamento matemático, ou seja, as relações matemáticas conhecidas como equações de equilíbrio que traduzem o

comportamento físico do sistema. Na seqüência deve haver as manipulações a fim de determinar as incógnitas do problema, que podem ser: Deslocamentos, Deformações e/ou Tensões. Assim tem-se o resultado destas solicitações e a partir disto consegue-se realizar uma comparação do modelo proposto com o modelo real para uma correta e ideal interpretação dos resultados. Esse tipo de solução pode ser chamado de método analítico clássico, onde de fato neste tipo de cálculo conseguem-se com exatidão as respostas dos deslocamentos, deformações e/ou tensões da estrutura em seus infinitos pontos, apenas enfatizando que este tipo de solução é válido onde a geometria e os carregamentos são de alguma maneira denominados como simples, o que consideravelmente afasta-se dos problemas de geometria complexa que são maioria nas aplicações no campo de engenharia e outros atuais.

A metodologia do sistema discreto padrão baseia-se neste desenvolvimento de uma busca para soluções impróprias da utilização de métodos analíticos simples, onde se conhece toda a estrutura em análise e também supõe-se distinguir o comportamento físico. Por este motivo o desconhecimento da complexidade de um certo sistema, implica na tentativa de estabelecer um método aplicável a qualquer tipo de caso, seja ele complexo ou não. A generalidade do método consiste na realização de uma analogia com o método analítico, entretanto aplicável somente a sistemas discretos, levando em conta algumas particularidades de cada elemento escolhido quando da necessidade de montagem dos mesmos. Por se tratar de sistemas discretos, é devido compreender que cada elemento deve ser tratado como um “elemento finito” e não mais como um elemento diferencial tratado no sistema contínuo.

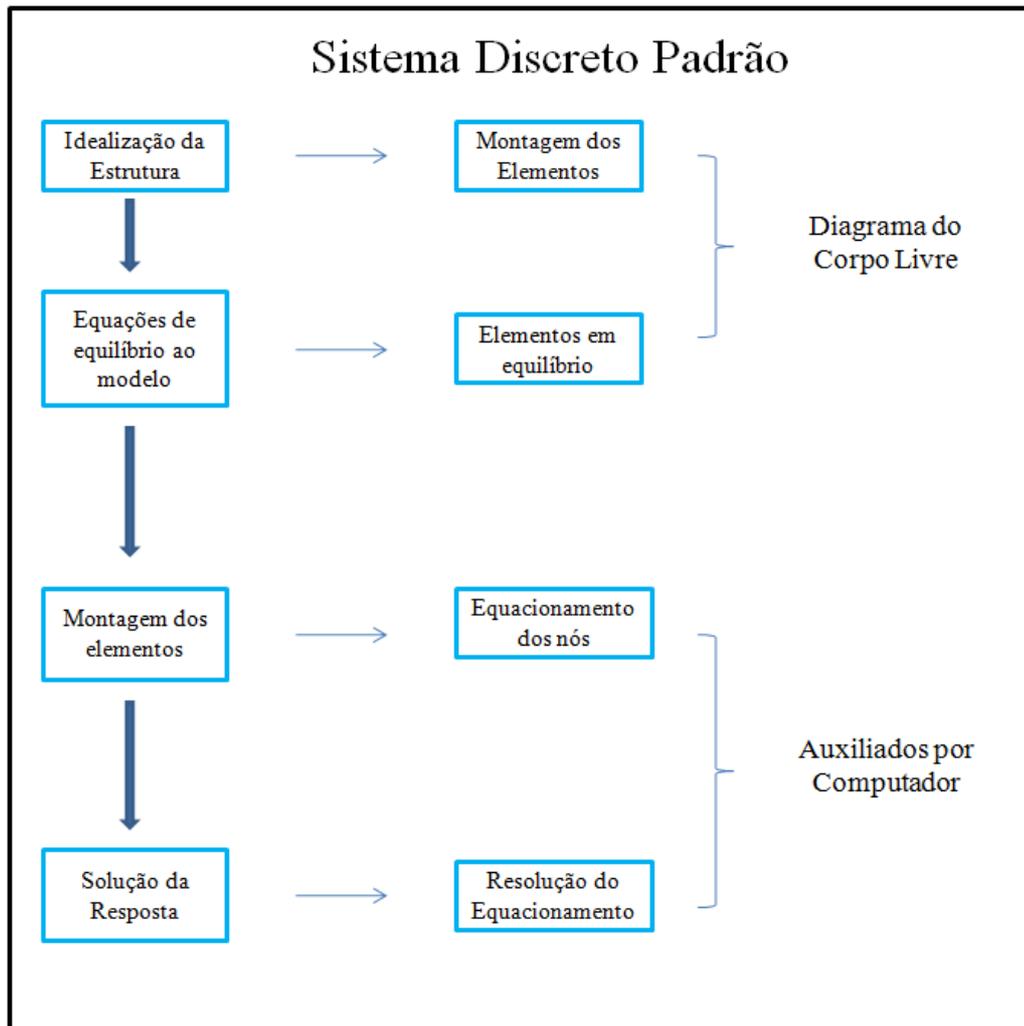


Figura 2 – Método do Sistema Discreto Padrão  
Fonte: O autor (2008)

### 2.3 – TIPOS DE ELEMENTOS

O MEF apresenta uma direção para resolver e solucionar problemas contínuos altamente complexos permitindo a subdivisão do sistema contínuo em uma série de elementos correlacionados, ou interconectados. Basicamente a técnica consiste em modelar todo o sistema como uma montagem de finitos elementos ou partes discretas. O grau no qual a montagem dos elementos representa todo o sistema depende muitas vezes do número, tamanho e tipo de elemento escolhido para tal representação.

Desde que fora introduzido o conceito de discretização do sistema no MEF, os procedimentos oriundos das idéias de *HRENKOFF* considerava apenas simples exemplos na área de análises estruturais, onde elementos barras eram arranjados em grupo. O benefício que as idéias dele trouxeram era o entendimento da técnica e os conceitos fundamentais sem, ou

quase muito pouco, houvesse a necessidade de algum tipo de manipulação matemática. Logo, parte-se do princípio que para gerar uma boa análise, o primeiro passo é a tentativa de substituir o sistema contínuo complexo por um sistema equivalente, porém idealizado, ou seja, discretizado. Assim este novo sistema consistirá de inúmeros elementos conectados um a um por pontos ou nós, o que implica ou dificulta um pouco a análise é definir qual o tipo de elemento correto para tal aplicação e quais são as suas propriedades.

Ao longo deste capítulo analisar-se-ão os elementos finitos que compõe a gama de elementos disponíveis para resolução de sistemas e problemas altamente complexos no domínio contínuo.

### 2.3.1 – Elemento Mola

O elemento denominado “mola”, senão o mais importante é considerado o primário, o elemento no qual partem as abordagens matemáticas relativas à aplicação de outros elementos na discretização do sistema. Por ser considerado elementar, estes conceitos da mola servem como base para o entendimento do comportamento de outros inúmeros elementos no qual posteriormente a este, serão enfatizados.

Justamente pelo fato de ser o primordial ou o mais simples, o elemento mola assume como carregamentos, apenas duas situações, que são: Compressão e Tração. Em consequência deste fato é válido salientar que a mola transmite apenas forças axiais e sofre também somente deslocamentos axiais, portanto os únicos parâmetros vistos neste sistema são: Forças, Deslocamentos e a Matriz de Rigidez do elemento. Na representação de um elemento mola deve-se pensar no diagrama de corpo livre, que é a representação das forças e deslocamentos atuantes no elemento. É perceptivo o fato de que não há necessidade de aproximar a função utilizando um tipo de função de interpolação, porque a lei de Hooke permite essa representação de uma forma exata e direta, ao contrário de alguns outros elementos no qual sem uma devida função de interpolação fica complicada a representação.

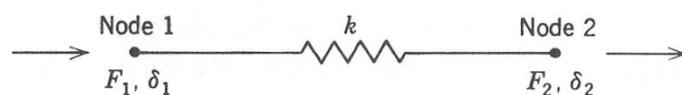


Figura 3 – Diagrama de corpo livre elemento Mola

Fonte: Huebner

Na lei de Hooke está estabelecido que a força aplicada ao elemento seja igual ao deslocamento da massa a partir do seu equilíbrio proporcional a constante da mola, ou do corpo que sofre a deformação, logo:

$$F = k \cdot \delta \quad (1)$$

Portanto aplicando a lei para o diagrama do corpo livre, relacionando Força-Deslocamento a cada nó, tem-se:

$$F_1 = \delta_1 \cdot k - \delta_2 \cdot k, \text{ para o nó 1} \quad (2)$$

e

$$F_2 = -\delta_1 \cdot k + \delta_2 \cdot k, \text{ para o nó 2} \quad (3)$$

De forma a facilitar o cálculo o conjunto de forças-deslocamentos, válidos para esta condição de equilíbrio, há uma forma de manipular matematicamente e também permitir facilidade computacional, em termos de números de variáveis e conjunto de equações, esta forma é denominada matricial. Aplicando o cálculo matricial nas equações (2) e (3) pode-se concluir que:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Ou ainda de uma forma generalizada,

$$\{F\} = [k] \cdot \{\delta\} \quad (5)$$

A expressão (5) mostra que elementos de  $[k]$  podem assumir valores matriciais, sendo igual a  $k_{ij}$ , onde  $i$  assume valores relativos às linhas e  $j$  assume valores relativos às colunas. A matriz  $[k]$  é denominada a matriz de Rigidez do elemento mola, o vetor coluna  $\{\delta\}$  determina os deslocamentos, e o vetor coluna  $\{F\}$  é a força nodal resultante do elemento. É importante levar em conta as condições de multiplicação de matrizes, que implica na matriz  $[k]$  ter o número de colunas igual ao número de linhas do vetor coluna  $\{\delta\}$ , a equação (4) mostra que:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}_{2 \times 1} \quad (6)$$

comprovando que o resultado fornece uma matriz  $2 \times 2$ . Assim é conclusivo que para um elemento finito com “n” componentes de deslocamento, a matriz de rigidez terá sempre dimensão  $n \times n$ .

Sintetizando o significado físico da matriz de rigidez para qualquer elemento finito, pode-se dizer que conhecendo a matriz, a relação Força-Deslocamento está presumida para o elemento em termos de deslocamentos. No caso simples da mola cada nó representa uma componente de deslocamento, ou seja, apenas um grau de liberdade. Assim com base no elemento mola conclui-se que o coeficiente  $k_{ij}$  da matriz de rigidez de um elemento finito, representa a força aplicada ao grau de liberdade  $i$ , imposto pelo deslocamento do grau de liberdade  $j$ , sustentando os outros quaisquer graus de liberdade bloqueados.

Esta seria a generalização da aplicação do elemento mola no entendimento da matriz de rigidez para qualquer outro elemento finito que possa ser utilizado.

### 2.3.2 – Elemento Barra

Este elemento também faz parte do estudo unidimensional e a semelhança com o elemento mola aqui é válida, e também importante para o seguimento da formulação deste elemento pela semelhança e equivalência de algumas propriedades.

É de conhecimento que a barra possui seção transversal constante e a aplicação da mesma é útil em estruturas reticuladas, ou seja, propriamente a treliça. Um fato de extrema importância é que as juntas estruturais de uma treliça são articuladas, sendo assim as forças atuantes nesta estrutura são aplicadas somente nas suas juntas, ou mais especificamente, nos seus nós. Portanto deve-se concluir que as barras, assim como a mola, transmitem apenas forças axiais que podem ser de Tração ou Compressão, e as variáveis no estudo do elemento barra são somente: Forças, Deslocamentos e a Matriz de Rigidez, semelhante ao à mola.

No diagrama de corpo livre de uma estrutura do tipo treliça, existe a possibilidade de representação de apenas uma parcela da treliça, no caso isolado somente uma barra, ou também representar a treliça como um todo. Levando em conta que a treliça estará em equilíbrio o elemento isolado também estará em equilíbrio.

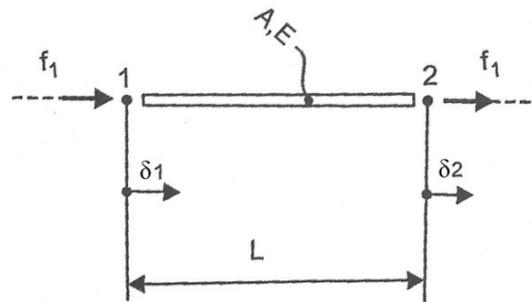


Figura 4 – Diagrama de corpo livre elemento barra  
Fonte: Avelino

A força axial  $f_1$ , que se distribui ao longo do comprimento  $L$  da barra, gera uma tensão normal atuante na seção transversal da mesma, assim:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (7)$$

A deformação pertinente a barra, é chamada de deformação linear média e é a razão entre a variação do comprimento com seu comprimento original,

$$\varepsilon = \frac{d}{L} \quad (8)$$

falando em âmbito linear, como é o caso do elemento barra, a tensão é proporcional à deformação e a constante de proporcionalidade é o módulo de elasticidade  $E$  do material, portanto:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (9)$$

Reorganizando as equações (7) e (8) juntamente com a equação (9), resulta em:

$$F = \frac{E \cdot A}{L} \cdot d \quad (10)$$

Analogamente ao elemento mola, o elemento barra se comporta semelhantemente, diferenciando-se apenas na constante elástica, onde  $\frac{E \cdot A}{L} = k$ . Aplicando a formulação linear

do elemento barra ao diagrama de corpo livre da figura (4) relacionando forças-deslocamentos para cada nó, tem-se:

$$F_1 = \frac{A.E}{L} \cdot \delta_1 - \frac{A.E}{L} \cdot \delta_2, \text{ para o nó 1} \quad (11)$$

e

$$F_2 = -\frac{A.E}{L} \cdot \delta_1 + \frac{A.E}{L} \cdot \delta_2, \text{ para o nó 2} \quad (12)$$

da mesma maneira vista anteriormente, aplica-se a matemática matricial para auxílio no caso de inúmeras variáveis, ou seja,

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A.E}{L} & -\frac{A.E}{L} \\ -\frac{A.E}{L} & \frac{A.E}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

onde generalizando:

$$\{F\} = \left[ \frac{A.E}{L} \right] \cdot \{\delta\} \quad (14)$$

### 2.3.2.1 – Sistemas de Coordenadas Local e Global

Em muitos casos para a determinação da matriz de Rigidez, devem-se levar em conta dois aspectos, que são eles: o elemento ou a estrutura. Para uma correta avaliação da estrutura completa deve-se ter o conhecimento de que uma estrutura abrange inúmeros elementos unidos, ou seja, uma montagem de elementos e isso implica que cada elemento contribui com forças e deslocamentos distintos. Por esta razão entra o conceito que define e engloba um sistema de referência comum para correlacionar cada elemento individualmente a fim de obter a matriz de rigidez de uma estrutura no caso do elemento barra, a treliça.

O sistema de coordenada local é definido como sendo o sistema que coordena o elemento, e o sistema de coordenada global é definido como o sistema que coordena a estrutura completa.

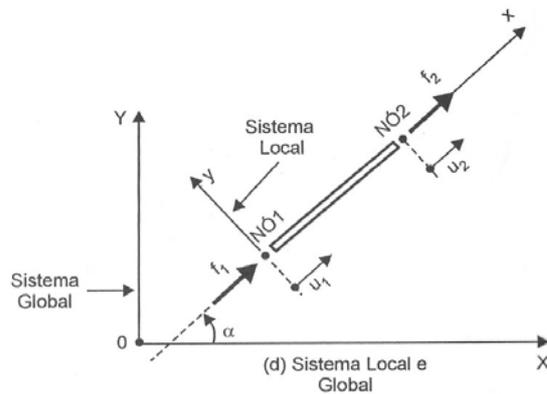


Figura 5 – Sistemas de Coordenadas  
Fonte: Avelino

Para análise em termos de coordenadas globais, visto que as matrizes de rigidez dos elementos são calculadas em coordenadas locais, é necessário introduzir um conceito de transformação, ou mais precisamente, um procedimento que realize a transformação de um sistema de coordenadas para o outro. Foi visto anteriormente que a matriz de rigidez no sistema local tem dimensão  $2 \times 2$ , duas forças e dois deslocamentos apenas atuando no elemento. Enquanto que segundo a figura 5 mostra que em um sistema global as componentes X e Y fornecem para o sistema mais duas componentes de forças e deslocamentos, portanto a matriz de rigidez no sistema global terá dimensão  $4 \times 4$ , e é por este motivo que há a necessidade de uma matriz de transformação. Como procedimento de projeção das forças globais nos eixos X e Y, visualizando a figura 5, pode-se realizar a operação em cada nó, assim em particular, tem-se:

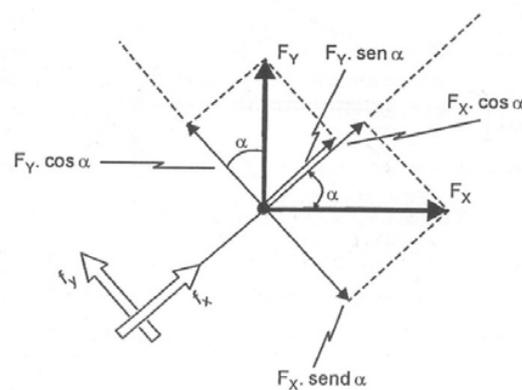


Figura 6 – Transformação Sistema Local Global  
Fonte: Avelino

calculando as forças em X e Y tem-se:

$$\begin{cases} f_{x1} = F_{x1} \cdot \text{cosa} + F_{y1} \cdot \text{sena} \\ f_{y1} = -F_{x1} \cdot \text{sena} + F_{y1} \cdot \text{cosa} \\ f_{x2} = F_{x2} \cdot \text{cosa} + F_{y2} \cdot \text{sena} \\ f_{y2} = -F_{x2} \cdot \text{sena} + F_{y2} \cdot \text{cosa} \end{cases} \quad (15)$$

colocando-as na maneira matricial, fica:

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{cosa} & \text{sena} & 0 & 0 \\ -\text{sena} & \text{cosa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{cosa} & \text{sena} \\ 0 & 0 & -\text{sena} & \text{cosa} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

onde,

$$\{f\} = [T] \cdot \{F\} \quad (17)$$

Analogamente a esta relação definida para forças no sistema local e global, é definido também a relação para os deslocamentos, como o sistema global fornece duas componentes de deslocamentos, tem-se as projeções de deslocamento no nó 1 e nó 2, sendo como  $U1$ ,  $V1$  e  $U2$ ,  $V2$ . Assim,

$$\begin{Bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{cosa} & \text{sena} & 0 & 0 \\ -\text{sena} & \text{cosa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{cosa} & \text{sena} \\ 0 & 0 & -\text{sena} & \text{cosa} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

onde,

$$\{\delta\} = [T] \cdot \{\Delta\} \quad (19)$$

em ambas as situações tanto em forças quanto em deslocamentos a matriz de transformação  $[T]$  é válida. Para a conclusão e a definição da matriz completa de rigidez no sistema global, partindo da equação (14) de um sistema local e aliando as transformações globais vistas acima de forças e deslocamentos, equações (17) e (19), tem-se:

$$[T].[F] = \{k\}.[T].\{\Delta\} \quad (20)$$

multiplicando a igualdade pela inversa de  $[T]$  e calculando a matriz de identidade, resulta em:

$$[F] = [T]^{-1}.\{k\}.[T].\{\Delta\} \quad (21)$$

onde,

$$[K] = [T]^T.\{k\}.[T] \quad (22)$$

esta equação comprova que a matriz de rigidez do sistema local  $\{k\}$  está inserida dentro do cálculo da matriz total de rigidez no sistema global  $[K]$ , através das transformações ocorridas. De uma maneira semelhante, porém com cada particularidade, todo elemento finito terá a sua matriz de transformação associada a quantidade de componentes de força associadas a ele, e a matriz de rigidez pode ser particular no caso local, ou como uma montagem de elementos no caso global. Portanto para o elemento barra selecionado com 2 nós da figura (6) a matriz de rigidez global ficará:

$$[K] = \frac{AE}{L} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cdot \text{sen} \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \cdot \text{sen} \alpha \\ \cos \alpha \cdot \text{sen} \alpha & \text{sen}^2 \alpha & -\cos \alpha \cdot \text{sen} \alpha & -\text{sen}^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \cdot \text{sen} \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cdot \text{sen} \alpha \\ -\cos \alpha \cdot \text{sen} \alpha & -\text{sen}^2 \alpha & \cos \alpha \cdot \text{sen} \alpha & \text{sen}^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (23)$$

### 2.3.3 – Elemento Viga

O último elemento da família considerada unidimensional que será apresentado e também considerado o mais complexo deles, é o elemento viga. Segue a idéia de aproveitar as propriedades vistas até aqui nos outros elementos, como mola e barra, até porque a formulação básica segue sempre o mesmo princípio.

Pela consideração de que é um elemento mais complexo, a teoria mostra que além de transmitir forças axiais a viga transmite também momentos fletores, forças cortantes e momento torçores. Igualmente ao elemento barra, a viga também compõe uma estrutura reticulada, porém não articulada, e sim rígida. As estruturas reticuladas podem ser nesse caso vigas contínuas ou pórticos. Para determinar a configuração, ou seja, o comportamento de

uma estrutura deste tipo por intermédio de seus deslocamentos nodais necessita-se ter noção da rigidez da estrutura de cada elemento, para posteriormente poder ser conhecida a matriz de rigidez da estrutura completa como uma montagem.

Na formulação da matriz de rigidez para a viga, é preciso primeiramente definir a seção transversal no qual será feita a análise. A matriz de rigidez de um elemento como este não possui apenas uma variável como era nos elementos anteriores, justamente por causa da transmissão dos momentos e das forças, e sim quatro variáveis que somadas montam a matriz de rigidez completa, são elas: Rigidez Axial, Rigidez à Flexão, e também Rigidez à Torção.

### 2.3.3.1 – Rigidez Axial

Analogamente ao elemento barra que somente transmite forças axiais, pode-se concluir que o elemento viga quando disposto de forças que atuem apenas ao longo do seu eixo, ou seja, forças somente axiais, o comportamento terá a mesma forma do comportamento axial da barra. Deste modo a parcela axial da matriz de Rigidez é definida por:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A.E}{L} & \frac{-A.E}{L} \\ \frac{-A.E}{L} & \frac{A.E}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Onde,

$$k = \begin{bmatrix} \frac{A.E}{L} & \frac{-A.E}{L} \\ \frac{-A.E}{L} & \frac{A.E}{L} \end{bmatrix} \quad (25)$$

### 2.3.3.2 – Rigidez à Flexão

A primeira definição a ser colocada em questão, é em torno da rigidez à flexão que a seção transversal do elemento possui. Quando no plano XY a flexão, a viga transmite apenas forças cortantes e momentos fletores, portanto tem-se duas componentes de força e deslocamento, tanto na força cortante quanto no momento fletor, somando quatro componentes de forças e deslocamentos.

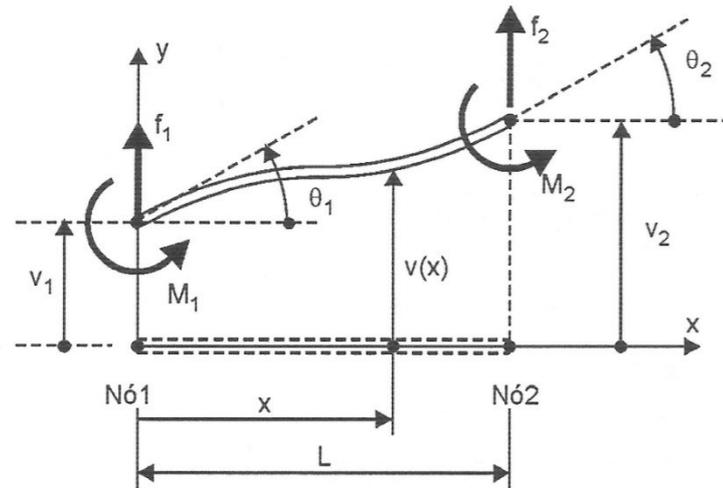


Figura 7 – Diagrama de Corpo livre elemento viga  
Fonte: Avelino

Logo a representação da matriz de rigidez de à flexão é dada pela expressão:

$$\{f\} = [k] \cdot \{\delta\} \quad (26)$$

como já é de fato conhecido que o elemento tem quatro graus de liberdade, a sua matriz de rigidez deve ter dimensão \$4 \times 4\$, resultando matricialmente em:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ M_1 \\ f_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = [k]_{4 \times 4} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

os coeficientes da matriz \$[k]\$ são determinados através do deslocamento unitário aplicado a qualquer um dos graus de liberdade do sistema, e o efeito ou a força que surge no grau de liberdade devido ao deslocamento aplicado. Dos graus de liberdade de um elemento viga disposto a rigidez de flexão tem-se que:

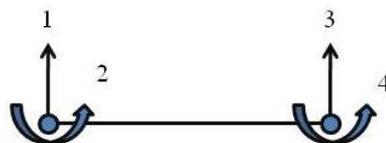


Figura 8 – Graus de liberdade Elemento Viga  
Fonte: O autor (2008)

As reações em (1) e (3) são reações ditas lineares impostas pelo deslocamento unitário, onde oriundas da resistência dos materiais, as equações de momentos e forças cortantes é igual a:

$$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{L^2} \text{ e } R = \frac{12EI}{L^3} \quad (28)$$

e as reações em (2) e (4) são reações ditas angulares impostas pelo ângulo unitário, onde também oriundo da resistência dos materiais, as equações de momento e forças cortantes é igual a:

$$M_1 = \frac{2EI}{L}, M_2 = \frac{4EI}{L} \text{ e } R = \frac{6EI}{L^2} \quad (30)$$

portanto na matriz de rigidez a flexão, as colunas 1 e 3 pertencem a imposição dos deslocamentos unitários, e as colunas 2 e 4 da imposição dos ângulos unitário, onde a matriz de rigidez completa à flexão é:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (30)$$

### 2.3.3.3 – Rigidez à Torção

O comportamento torsional da viga quando sujeito a uma determinada carga, gera uma contribuição de rigidez, que pode ser calculada através da equação de Saint-Venant de Resistência dos materiais, como:

$$M_x = G \cdot J \cdot \frac{d\theta}{dx} \quad (31)$$

Na determinação da matriz de rigidez do elemento viga sujeito a cargas torcionais deve-se analisar o diagrama de corpo livre para verificar melhor forma de relacionar os momentos no elemento.

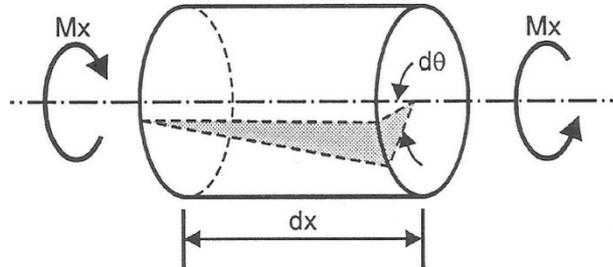


Figura 9 – Diagrama de Corpo livre à torção  
Fonte: Avelino

Visualizando o diagrama de corpo livre e aplicando o momento torçor em uma das extremidades da viga, e fazendo o deslocamento  $x$  ser igual a zero e igual  $l$  (comprimento da viga), resulta em:

$$\underbrace{-M_1 \cdot L}_{x=0} = \underbrace{-G \cdot J \cdot \theta_1}_{x=l} \quad (32)$$

$$M = \frac{G \cdot J}{L} \cdot \theta \quad (33)$$

Concretizando o cálculo dos esforços de torção, a contribuição para a matriz total de rigidez será:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G \cdot J}{L} & -\frac{G \cdot J}{L} \\ -\frac{G \cdot J}{L} & \frac{G \cdot J}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (34)$$

Onde,

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{G \cdot J}{L} & -\frac{G \cdot J}{L} \\ -\frac{G \cdot J}{L} & \frac{G \cdot J}{L} \end{bmatrix} \quad (35)$$

### 2.3.3.4 – Sistemas Local e Global

Da mesma forma como no elemento barra quando se quisera analisar o sistema como um todo, no caso particular de treliça, ou quando optara por analisar somente o elemento, é válido para o elemento viga também. O sistema local definido é o próprio elemento viga e o sistema global nesse caso passa a ser agora não mais uma treliça, mas sim um pórtico plano. Quando se fala em sistemas local e global vem acompanhado a idéia que há a necessidade de sempre relacionar os dois sistemas a um sistema de referência comum que transforme as forças para o outro sistema. Para sedimentar a idéia e haver um melhor entendimento desta transformação há a matriz de transformação já apresentada anteriormente ao elemento barra, pois a mesma matriz aqui também se torna necessária.

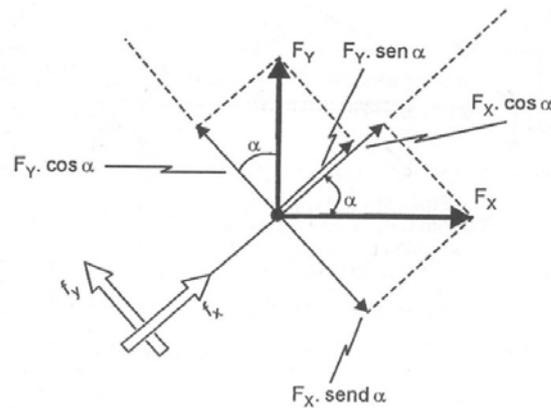


Figura 10 – Transformação Sistema Local - Global  
Fonte: Avelino

Importante lembrar que a viga é suposta de Rigidez axial e Rigidez à flexão e, portanto,

$$\begin{cases} f_{x1} = F_{x1} \cdot \cos \alpha + F_{y1} \cdot \sin \alpha \\ f_{y1} = -F_{x1} \cdot \sin \alpha + F_{y1} \cdot \cos \alpha \\ M_1 = \bar{M}_1 \\ f_{x2} = F_{x2} \cdot \cos \alpha + F_{y2} \cdot \sin \alpha \\ f_{y2} = -F_{x2} \cdot \sin \alpha + F_{y2} \cdot \cos \alpha \\ M_2 = \bar{M}_2 \end{cases} \quad (36)$$

Na maneira matricial tem-se:

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_1 \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (37)$$

onde,

$$\{f\} = [T] \cdot \{F\} \quad (38)$$

Como a matriz de rigidez para o sistema global tem seu equacionamento regido pela equação (22) e, portanto para um elemento viga a matriz de rigidez global transformada fica dessa forma:

$$[K] = \begin{bmatrix} a\lambda^2 + 12b\mu^2 & (a - 12b)\lambda\mu & -6bL\mu & -a\lambda^2 - 12b\mu^2 & -(a - 12b)\lambda\mu & -6bL\mu \\ a\mu^2 + 12b\lambda^2 & 6bL\lambda & 6bL\lambda & (a - 12b)\lambda\mu & -a\mu^2 - 12b\lambda^2 & 6bL\lambda \\ 4bL^2 & 6bL\mu & 6bL\mu & a\lambda^2 + 12b\mu^2 & (a - 12b)\lambda\mu & 6bL\mu \\ \text{Simétrico} & & & & & \\ -6bL\mu & 6bL\lambda & 2bL^2 & 6bL\mu & -6bL\lambda & 4bL^2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Considerando:

$$a = \frac{EA}{L}, b = \frac{EI}{L^3}, \lambda = \cos\alpha, \mu = \sin\alpha \quad (40)$$

### 2.3.4 – Elementos Bidimensionais e Tridimensionais

Nos elementos unidimensionais abordados anteriormente, na prática permitira a aplicação do método direto, ou seja, de fato estabelecia uma relação de uma força aplicada em um grau de liberdade (nó) há um deslocamento unitário nesse mesmo grau de liberdade (nó) e a partir disto podera determinar a matriz de rigidez do elemento. Para estes elementos o tipo de resposta se dava de alguma forma exata, devido à facilidade em adaptar equações oriundas

da resistência de materiais que estabelecia diretamente a relação Força-Deslocamento para cada grau de liberdade, porém aqui nos elementos ditos bi e tridimensionais essa resposta exata passa a ser aproximada por  $n$  fatores, um deles em especial é que o elemento também troca ações com seu contorno, dificultando ainda mais a formulação da resposta.

Na tarefa de aproximar a rigidez de um elemento finito deste tipo, há uma severa necessidade da utilização de processos matemáticos no qual é associado à interpolação de funções para representar a deformação interna no elemento, e não mais somente em seus nós. Para definir uma correta função de interpolação a ser utilizada em determinado problema, deve-se associar que o grau do polinômio desta função está correlacionado aos graus de liberdade do elemento. Nesse caso a forma de calcular os deslocamentos inter-nós para cada elemento, é partindo dos deslocamentos nodais, utilizar as funções de interpolação para aproximar essa resposta a cada elemento.

#### 2.3.4.1 – Matriz de Rigidez para Qualquer Elemento Finito Bi e Tridimensional

Para a geração da matriz de rigidez de um elemento finito quaisquer existem cinco critérios que desde já devem ser estabelecidos para determinar de uma forma aproximada a mesma. O primeiro critério a ser levado em conta e importante no ponto de vista da máxima aproximação da resposta, é especificar a função de deslocamento que defina de forma única o estado de deslocamentos em todos os pontos dentro do elemento em termos de graus de liberdade, permitindo assim que com os deslocamentos nodais conhecidos, se determine com clareza os deslocamentos dentro do elemento. Em vista desse fator é importante salientar que tamanho forem os graus de liberdade do elemento, o polinômio deve ter o mesmo número de coeficientes. O segundo passo para dar continuidade à solução é calcular os coeficientes até então desconhecidos do polinômio utilizado no problema, através da função de forma do elemento, que determina o modelo pelo qual é estabelecida a interpolação no campo de deslocamentos, e define os deslocamentos interiores ao elemento. O terceiro e quarto passo respectivamente estão subordinados a definição de relações como: Deformação – Deslocamento e Deformação – Tensão. A idéia continua sendo a mesma de que a partir de um dado conhecido, no caso os deslocamentos nodais, podem ser calculados as deformações e as tensões dentro do elemento. A quinta e última etapa é a determinação da matriz de rigidez do elemento, que passa a valer quando é feita uma relação entre as forças nodais e os deslocamentos nodais no elemento. Estabelecido os critérios que convergem para a resposta

da matriz de rigidez do elemento finito, é possível de uma maneira geral, determinar a matriz de rigidez de qualquer elemento que viera a ser escolhido para a discretização do sistema contínuo.

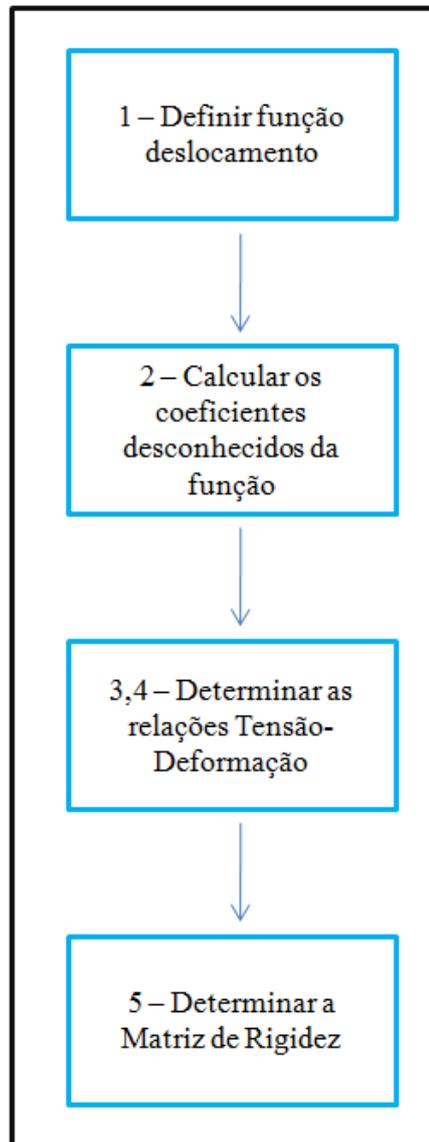


Figura 11 – 5 Passos na determinação da Matriz de Rigidez  
Fonte: O Autor

Para qualquer elemento adotado, seja ele bi ou tridimensional, há uma teoria que descreve o comportamento físico do elemento através de relações matemáticas apropriadas, oriundas da Resistência dos Materiais, como: Teoria da Elasticidade e Teoria de Placas e Cascas. A idéia no presente trabalho não é definir os conhecimentos de Resistência dos materiais, mas sim aliar estes conhecimentos na formulação dos elementos finitos. Portanto é de fato necessário compreender o comportamento físico do elemento através destas citadas

teorias, para posteriormente definir com objetividade a função de interpolação ideal, e realizar o cálculo das relações Tensão-Deformação.

#### 2.3.4.2 – Elemento De Tensão Plana Triangular

Qualquer corpo contínuo bidimensional por ser representado como uma montagem de diversos triângulos e pode ser denominado como elementos de tensão plana triangular devido às cargas agir paralelamente ao plano. Também é perceptível que o elemento triângulo possui apenas três nós, e que os nós movimentam através de duas componentes, uma em  $x$  e outra em  $y$ , definidos por meio da teoria da elasticidade. Por conseguinte a matriz de rigidez pode ser determinada de modo que o elemento possui apenas três nós, e cada nó está amarrado a duas componentes de deslocamentos, logo o elemento possui seis graus de liberdade, e matriz será do tipo:

$$\{f\}_{6 \times 1} = [k]_{6 \times 6} \cdot \{\delta\}_{6 \times 1} \quad (41)$$

A partir desse dado é definido conforme a figura 11, a função de interpolação, o cálculo das deformações e também o cálculo das tensões, com isso fica fácil obter a montagem da matriz de rigidez para o elemento em questão, no caso Triângulo plano.

#### 2.3.4.3 - Elemento De Tensão Plana Retangular

Da mesma maneira como foi comentado no elemento anterior, é possível subdividir o corpo contínuo de uma maneira retangular, e representar a montagem com diversos retângulos lado a lado. O elemento retângulo possui quatro vértices, que neste ponto pode ser considerado quatro nós. Além disso, tem suas componentes em  $x$  e  $y$ . Conseqüentemente por possuir quatro nós e duas componentes de deslocamento, a matriz de rigidez do elemento possui dois graus de liberdade por nó, ficando a matriz dessa forma:

$$\{f\}_{8 \times 1} = [k]_{8 \times 8} \cdot \{\delta\}_{8 \times 1} \quad (42)$$

Seguem-se os mesmos passos já descritos anteriormente, que é a definição da função de interpolação, o cálculo das deformações, e também o cálculo das tensões para a definição completa da matriz de rigidez do elemento retângulo.

#### 2.3.4.4 – Elemento Sólido Tetraédrico Linear

Quando se fala em corpo sólido, o assunto passa a ser agora tridimensional, e as cargas não agem mais paralelamente ao plano ou perpendicular ao plano como era no estado de deformação plana ou estado de tensão plana respectivamente, mas sim as cargas passam a agir nas três direções, ou seja, em  $x, y$  e  $z$ . Portanto fica definido como estado triaxial de tensões. Um corpo contínuo tridimensional pode ser representado como uma montagem de diversos tetraedros.

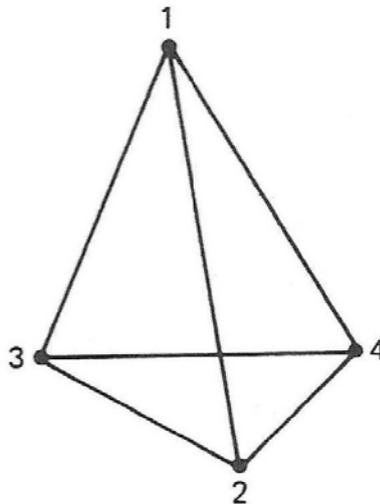


Figura 12 – Elemento Tetraédrico  
Fonte: Huebner

O elemento tetraedro possui quatro nós, como mostra a figura, que se movimentam em três componentes de deslocamento, respeitando o estado triaxial de tensões definidos na teoria da elasticidade. Assim, o elemento possui três graus de liberdade por nó, totalizando doze graus de liberdade. A matriz de rigidez é definida como:

$$\{f\}_{12 \times 1} = [k]_{12 \times 12} \cdot \{\delta\}_{12 \times 1} \quad (43)$$

Os passos seguintes para determinação completa da matriz de rigidez é a definição das funções de interpolação, o cálculo das deformações e também das tensões.

#### 2.3.4.5 – Elemento Sólido Tetraédrico Parabólico

A formulação e a idéia do elemento sólido tetraédrico parabólico é igual ao do elemento sólido tetraédrico linear, no qual a montagem de elementos é constituída de finitos elementos na forma de “tetraedros”, porém com apenas uma diferença significativa que é na quantidade de graus de liberdade.

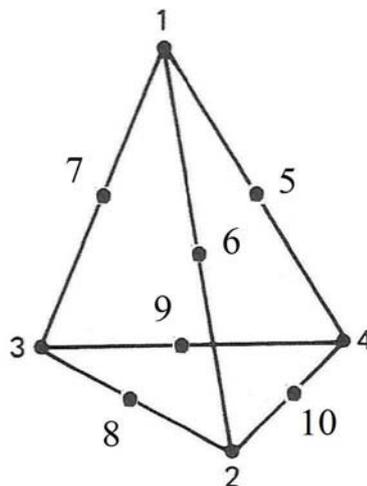


Figura 13 – Elemento Tetraédrico Parabólico  
Fonte: Huebner

A vantagem desse elemento, com a adição de nós intermediários, é aumentar o número de graus de liberdade do elemento, para que conseqüentemente a função de interpolação tenha maior grau e apresente uma resposta mais precisa, no campo das deformações e tensões. Como o elemento tetraédrico parabólico possui dez nós que se deslocam nas três direções, respeitando o estado triaxial de tensões da teoria da elasticidade, o mesmo terá um total de trinta graus de liberdade, portanto a matriz de rigidez é definida pela fórmula:

$$\{f\}_{30 \times 1} = [k]_{30 \times 30} \cdot \{\delta\}_{30 \times 1} \quad (44)$$

Os passos que dão continuidade na resolução do problema para um elemento tetraédrico do tipo parabólico é a definição da função de interpolação, o cálculo das deformações e tensões, e finalmente a solução da matriz de rigidez do elemento. A geração automática de malhas em elementos finitos, disponíveis atualmente nos softwares de análise, permite em geometrias complicadas gerar malhas de elementos tetraédricos, pois devido à versatilidade da geometria qualquer corpo sólido ou suas diversas partes podem ser representados como um conjunto de tetraedros. Esse elemento é, portanto, bastante utilizado em aplicações práticas que o cálculo de deformações e tensões necessitam maior acuracidade (AVELINO).

#### 2.3.4.6 – Elemento Sólido Hexaédrico Linear

Na continuação da formulação de elementos tridimensionais para discretizar os corpos sólidos, pode-se também dividir o corpo sólido contínuo em elementos do tipo “Hexaédricos”, com as forças respeitando o estado triaxial de tensões.

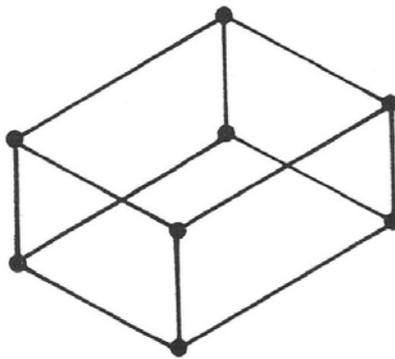


Figura 14 – Elemento Hexaédrico Linear  
Fonte: Huebner

O elemento possui oito vértices, conseqüentemente oito nós que também por se tratar de uma escala tridimensional, possui deslocamentos nas três direções, totalizando vinte e quatro graus de liberdade, e definindo sua matriz de rigidez através da equação:

$$\{f\}_{24 \times 1} = [k]_{24 \times 24} \cdot \{\delta\}_{24 \times 1} \quad (45)$$

Os três passos fundamentais consequentes são os mesmos já definidos em outros elementos, ou seja, definição da função de interpolação, definição das tensões e deformações e por último a montagem da matriz de rigidez total.

Na análise propriamente dita que será realizada posteriormente nos outros capítulos, não será de necessidade introduzir aqui os conceitos de discretização com elementos do tipo: Placa, Casa e Axisimétrico. Fora introduzido os elementos planos para dar uma idéia do procedimento como um *know-how* básico, para depois mostrar os elementos sólidos e sua maneira de realização dos cálculos, enfatizando que para o modelo dentário o elemento que melhor representará suas deformações e tensões de uma forma precisa será o elemento tetraédrico parabólico.

## 2.4 – COMO O MÉTODO DESENVOLVE A SOLUÇÃO

Sumarizando de uma forma geral, o MEF desenvolve a solução seguindo certas etapas, onde cada etapa tem uma importância significativa no desenvolvimento da solução.

A primeira etapa (1) é a discretização do sistema contínuo, que consiste na divisão do corpo considerado contínuo em um sistema equivalente (discreto) abrangido de uma montagem de diversos elementos finitos “*linkados*” através de seus nós ou graus de liberdade. Esses elementos devem ser escolhidos conforme a necessidade do problema, do tipo de análise que se deseja realizar. Se a análise a ser realizada for unidimensional, os elementos disponíveis são: Elemento Mola, Barra e Viga. Para análises do tipo bidimensional, ou seja, onde há carregamento apenas no seu plano que pode ser plano de tensão plana ou plano de deformação plana, os elementos disponíveis são: Elementos Triangulares e Quadriláteros. Para análises de corpos sólidos, ou tridimensionais, onde o carregamento atua no estado triaxial de tensões, ou seja, em  $x$ ,  $y$  e  $z$ , os elementos podem ser dois modelos: Elemento Tetraédrico e Tetraédrico Parabólico ou Elemento Hexaédrico.

A segunda etapa (2) é a definição das funções de interpolação, que tem por objetivo a escolha de uma devida função deslocamento para cada elemento e essa função é definida no elemento usando os valores nodais do próprio elemento. As funções de interpolação podem ser polinômios lineares, quadráticos ou ainda cúbicos por serem simples e fáceis nos cálculos integrais e diferenciais. Geralmente na escolha da função é levado em conta que o grau do polinômio a ser optado depende do número de nós que o elemento possui. As funções de interpolação sempre são expressas em termos de variáveis nodais.

A terceira etapa (3) é mais complexa, uma vez que a discretização e a escolha das funções de interpolação foram escolhidas corretamente, é a correta definição das relações matemáticas que traduzem o comportamento físico do elemento, que dependendo desses elementos as relações podem ser altamente complexas. Para um elemento unidimensional escolhido subentendesse que pequenas deformações atuarão, e as leis para relacionar tensões e deformações são de uma maneira simples, como a lei de Hooke. Em suma para elementos bi e tridimensionais existem teorias oriundas da resistência dos materiais que descrevem corretamente as relações de tensões e deformações.

A quarta etapa (4) é determinar a matriz de equações das relações de tensão e deformação devidamente escolhidas conforme o elemento. Para montagem dos elementos e determinação das corretas matrizes há alguns métodos, que são: Método Dos Deslocamentos ou Rigidez, Método Direto, Método Variacional, Método Dos Resíduos Ponderados e Método Do Mínimo Potencial De Energia. Pela facilidade em termos computacionais que o método da rigidez oferece é geralmente o escolhido.

A quinta etapa (5) é a montagem dos elementos para a obtenção de um sistema global de equações, que descreva o comportamento total do sistema e, além disso, introduzir as condições de contorno no problema. A considerada sexta etapa (6) é a solução do sistema de equações montados através do método da rigidez na etapa (5) para obter os valores nodais desconhecidos. A solução analítica pode ser resolvida pelo método de Gauss ou método da eliminação, porém com o advento computacional é de uma maneira simples solucionar problemas deste tipo matricial com  $n$  variáveis.

A última etapa (7) é a parte de pós-processamento que se define pela interpretação dos resultados numéricos dos cálculos efetuados analiticamente ou pelo computador descrevendo assim o comportamento físico do sistema, mostrando os pontos da estrutura em análise onde ocorrem maiores deformações e tensões no caso estrutural, ou no caso de transferência de calor mostrando os pontos onde ocorrem maiores temperaturas ao longo do material. Em suma essas seriam todas as etapas de processamento para desenvolver a solução de um problema que necessita da ajuda de elementos finitos.

### 3 - ANÁLISE ESTRUTURA DENTÁRIA

Todos os problemas que necessitam de uma análise de elementos finitos envolvem uma seqüência de passos para sua total solução, estes passos podem ser resumidos em: Pré-Processamento, Processamento e Pós-Processamento. Independente de o problema em questão for de natureza puramente mecânica ou de natureza biomecânica, neste caso especial da estrutura dentária, os passos em questão sempre são definidos como padrão e divididos nestas três etapas, mesmo sabendo que a análise que será realizada na estrutura dentária é uma análise estrutural, ou seja, mecânica.

#### 3.1 – PRÉ-PROCESSAMENTO

A definição de pré-processamento juntamente com a parte de pós-processamento são as duas etapas que exigem um maior conhecimento de ferramentas por parte do Engenheiro que está por trás de uma análise. Nessa etapa é definido o modelo geométrico, as condições de contorno, as especificações de propriedades dos materiais utilizados no modelo, para posteriormente obter e a geração da malha de elementos finitos. Na competência deste trabalho a parte de pré-processamento também engloba todos estes passos citados acima, e a partir desse momento será mostrado cada etapa e suas particularidades.

##### 3.1.1 – Geometria CAD

É nessa etapa que a geometria complexa do dente molar em estudo é modelada através da engenharia reversa, ou seja, transformar o modelo físico já conhecido em um modelo digital possível de fazer alguns estudos como MEF.

A Engenharia Reversa é possível de ser realizada através do método da computação gráfica disponível atualmente na medicina, que é a Tomografia Computadorizada. Faz-se a tomografia da geometria que se quer transformar, após ser feita, um software específico processa a leitura do modelo físico, e posteriormente transforma em uma superfície de pontos reconhecida como elemento “casca” pelo software utilizado, neste caso o *ProE* com o módulo *Reverse Engineering*.

A idéia inicial em torno da estrutura dentária era da colocação de um adesivo restaurador de 25µm entre o preparo cavitário MOD do dente e a resina para aumentar a

resistência à fratura do dente pós tratamento endodôntico , porém o software ProE com seu módulo ProMechanica para análise estrutural não permite a geração da malha com elementos de pequenas espessuras devido às suas limitações internas. Na parte de geração de malha será explicitado um pouco esta limitação.

Como o estudo está dividido em quatro grupos com configurações distintas será apenas uma geometria válida, ou seja, no estudo dos quatro grupos a variação se dá em torno dos materiais e conseqüentemente de suas propriedades, fazendo assim com que a geometria analisada seja exatamente a mesma, apresentadas a seguir:

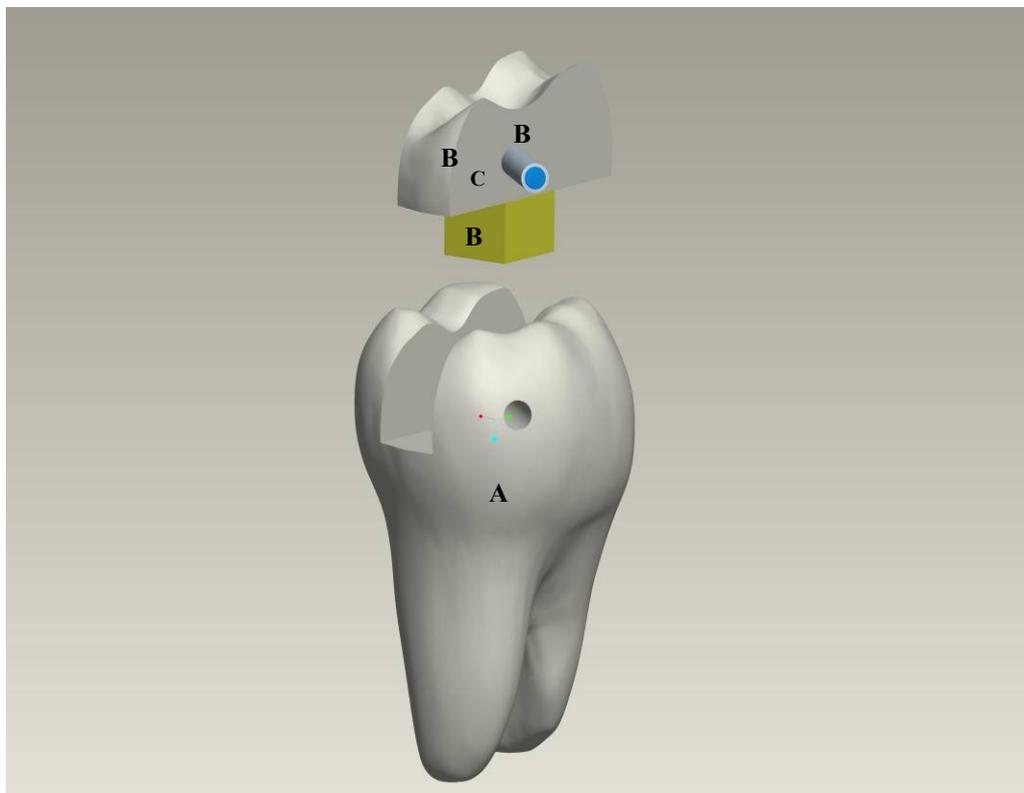


Figura 15 – Geometria CAD: Configurações Distintas, A - Dentina, B - Resina, C – Pino.  
Fonte: O Autor (2008)

### 3.1.2 – Definição das Propriedades dos Materiais

Para a execução no software ProE se faz necessário alimentar as propriedades mecânicas referentes aos materiais que serão utilizados, lembrando que os materiais nesse caso tem um comportamento isotrópico, ou seja, as mesmas propriedades nas três direções, e entre as várias propriedades mecânicas encontradas em um material, somente duas são necessárias:

- Módulo de Elasticidade (E): Define a inclinação da curva Tensão-Deformação até o limite de proporcionalidade. E é uma medida de rigidez do material em sua região elástica e tem as mesmas unidades de Tensão. A maioria dos materiais exibe esse comportamento linear. Também a maior parte dos materiais ditos dúcteis, o módulo de elasticidade em compressão é o mesmo que em tração.
- Coeficiente de Poisson ( $\nu$ ): Quando um corpo deformável é submetido a uma força axial de tração ou compressão, o material deforma-se longitudinalmente e transversalmente, e para caracterizar estas deformações define-se o coeficiente de Poisson, como sendo a relação entre a deformação transversal com a deformação longitudinal do material.

Baseado em algumas literaturas tem-se a definição completa das propriedades mecânicas dos materiais utilizados na análise, como mostra a tabela a seguir.

Material	Módulo de Elasticidade (Gpa)	Coeficiente de Poisson	Referências
Dentina	15,0	0,23	(5)
Adesivo Restaurador	4,0	0,35	(5)
Resina Z250	11,6	0,30	(4),(1)
Resina Flow Revolution	5,1	0,39	(4),(3)
Pino de Fibra de Vidro	40,0	0,26	(2)
Pino de Zircônio	210,0	0,33	(3)

Tabela 1 – Propriedades Mecânicas dos Materiais

### 3.1.3 – Condições de Contorno

O carregamento, ou seja, a aplicação da carga teve como totalidade uma aplicação de três forças verticais (ao longo do eixo do dente) de 200N nas três superfícies denominadas sob maior ação de forças mastigatórias conforme literaturas.

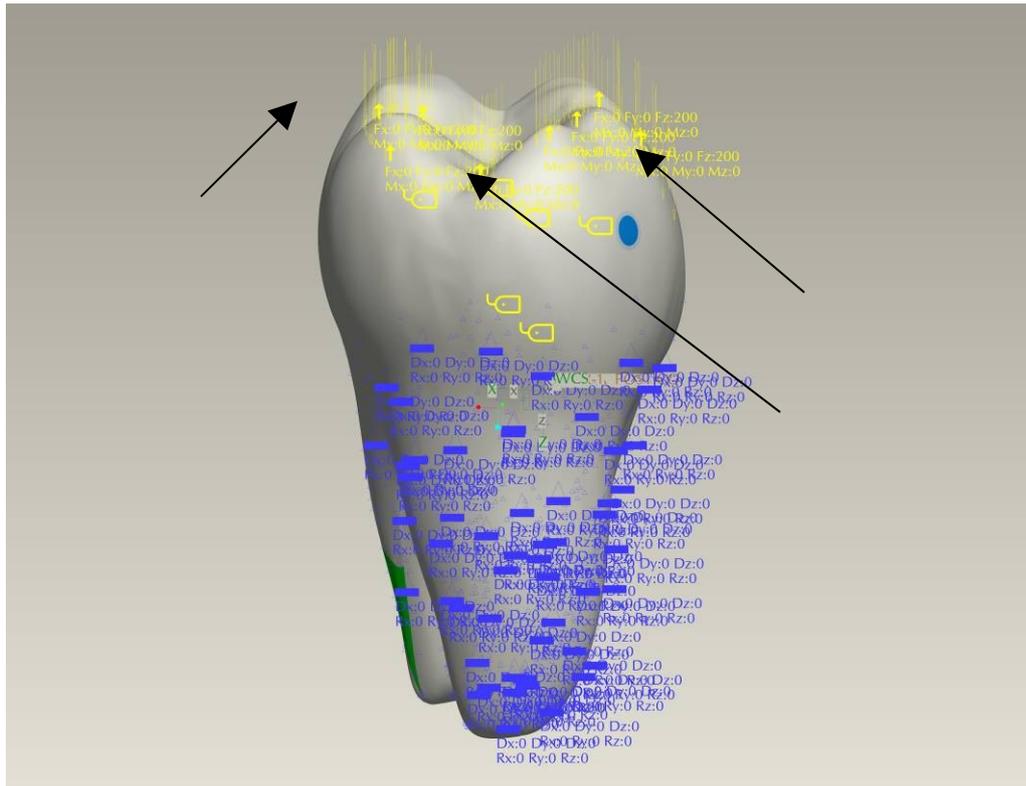


Figura 16 – Condições de Contorno: Aplicação da Força  
Fonte: O Autor (2008)

A restrição do modelo dentário é feita através da fixação de toda a raiz do dente o que representa quase 2/3 do dente restringido de movimento, ou seja, nenhum grau de liberdade na raiz, restando 1/3 do dente que é efetivamente a parte externa que situa-se sob as condições extremas de forças mastigatórias.

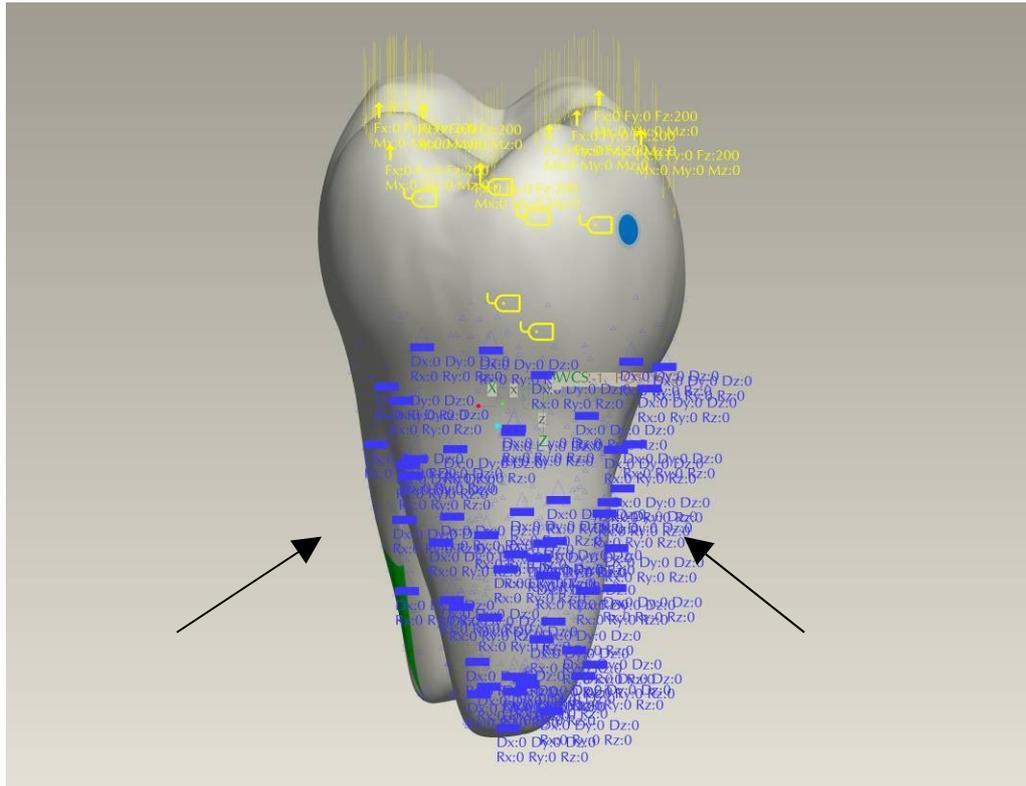


Figura 17 – Condições de Contorno: Restrição do Dente  
Fonte: O Autor (2008)

### 3.1.4 – Geração da Malha

Para geração da malha de elementos finitos, o elemento escolhido é o sólido tetraédrico parabólico, por representar de uma maneira mais qualitativa a discretização do modelo, e também por possuir um maior número de graus de liberdade, tornando possível uma resposta mais precisa. A geração da malha é realizada pelo software *ProE* e o refinamento da malha é realizada pelo analista em questão, nesse caso não houve a necessidade de um refinar a malha, pelo simples fato da escolha de geração de malha ser feita por volumes e não pelo dente como uma montagem, não tendo a necessidade portanto de refinamento. Para os quatro grupos a malha gerada possui 5848 elementos tetraédricos parabólicos.

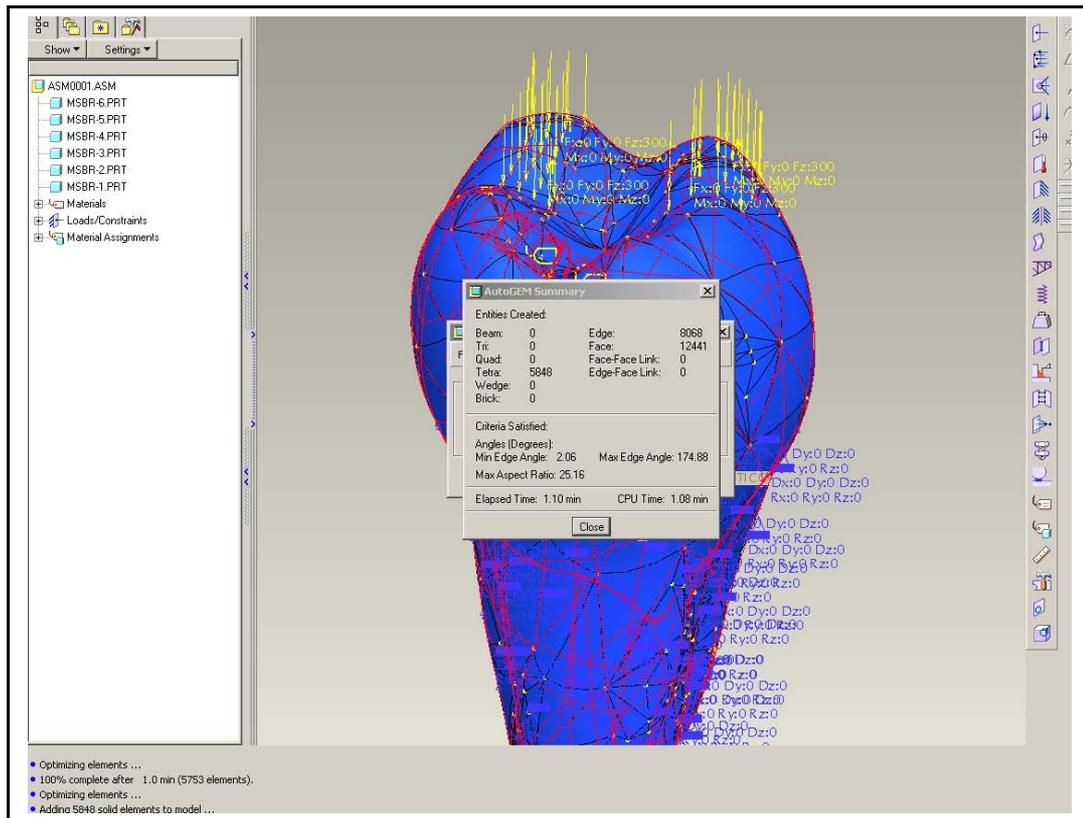


Figura 18 – Condições de Contorno: Geração da Malha  
Fonte: O Autor (2008)

### 3.1.5 – Limitação da Malha

Quando o “Assembly” (Montagem Estrutura Dentária) possui componentes que diferem em termos de tamanho e espessura, a geração da malha pode ser dificultada pelos seguintes motivos:

- Quando se esta gerando a malha em uma montagem que contenha componentes ditos grandes e esta montagem também contém pequenos componentes, com certeza a malha será gerada conforme os elementos grandes e falhará na hora da geração para os elementos pequenos.
- Quando na montagem existe interferência entre os componentes também não será gerada a malha.
- Também quando existir uma diferença significativa em exatidão geométrica de dois itens em uma montagem, é obviamente difícil de criar um conjunto coesivo que inclua

ambos os itens. Nesses casos depois do “*mate*” dos itens a geração da malha as diferenças de refinamento podem causar incompatibilidades geométricas.

- Quando a montagem dos componentes foi realizada através de outros softwares com componentes que possuam diversas extensões, a tolerância individual de cada componente importado é convertido para a tolerância de montagem, e isso provoca às vezes uma diferença de valores impossibilitando a geração da malha.
- Outro fator que pode ocorrer também é a própria geração da malha bem sucedida em alguns elementos, elementos dito grandes, e em outros elementos pequenos não gerar com tanta acuracidade a malha.

Como já citado anteriormente a idéia era da colocação do adesivo restaurador de 25  $\mu\text{m}$  para analisar também a adição de resistência que o mesmo cederia à estrutura inteira. Porém, com a limitação do software em gerar a malha de uma montagem com componentes que diferem em ordem de tamanho e espessura, não foi possível a inclusão deste item na estrutura dentária.

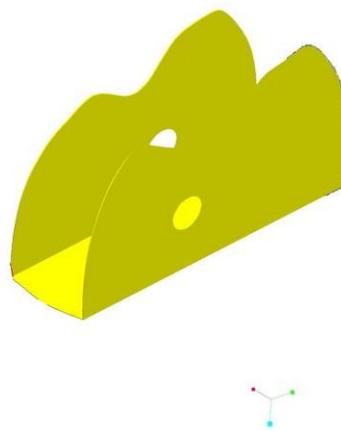


Figura 19 – Adesivo Restaurador Não Incluso  
Fonte: O Autor (2008)

### 3.2 – PROCESSAMENTO

A parte de processamento engloba somente 10% de todo o problema em MEF, seria uma parcela muito pequena de toda análise, porém devido ao grau de dificuldade da análise que se deseja esses 10% podem demorar de minutos até horas, dependendo também da velocidade dos computadores. A parte do software que faz o processamento dos cálculos é chamado de “solver”. O solver tem a função de:

- Montar as matrizes de cada elemento;
- Montar a matriz do sistema global;
- Reduzir a matriz global com o uso das condições de contorno;
- Resolver o sistema independente do tamanho.

Uma vez o solver tendo atuado na análise, sendo o problema estrutural solucionado computacionalmente, os resultados dos campos de tensões, deformações e deslocamentos são obtidos. Com base nessas respostas alimentadas pelo solver que se parte para a análise propriamente dita, o pós-processamento.

### 3.3 – PÓS-PROCESSAMENTO

A Análise do modelo é efetuada utilizando-se os resultados obtidos, como os campos de tensões, deformações e deslocamentos, entre outros. A análise de tensões pode ser feita pela comparação dos componentes de tensões normais, tensões principais ou ainda tensão equivalente de Von Misses, que realmente significa a tensão efetiva.

#### 3.3.1 – Critério de Von Misses

O conceito de Von Misses é baseado na concepção de energia interna, ou seja, todos os componentes de tensões normais, como também os componentes de tensões de cisalhamento são incorporados no cálculo da tensão de Von Misses. A teoria deste critério afirma que “quando a energia interna em um ponto específico da estrutura excede certo limite, a estrutura cederá nesse ponto”. A segurança da estrutura em questão será certa somente se a tensão de Von Misses for menor ou igual ao valor absoluto da tensão de escoamento de tração

ou compressão, ou seja, a tensão de tração ou compressão uniaxial em uma amostra do mesmo material, acima da qual este material escoar, não mais se comportando elasticamente. A energia acumulada no interior da estrutura é representada pela tensão Von Mises ( $\sigma$ ) que envolve como já descrito a combinação de tensões aplicadas normais e cisalhantes ( $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_{xy}$ ) no mesmo ponto. Matematicamente a tensão Von Mises é representada pela seguinte equação:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (46)$$

A análise propriamente dita é sob um sólido, e um sólido está submetido geralmente a um estado triaxial de tensões. Dado um certo ponto da estrutura tensionada a tensão  $S_y$ , é a tensão aplicada naquele ponto na direção vertical, se esta tensão for positiva estará tracionando o sólido, assim denominada uma tensão de tração, e caso seja negativa estará comprimindo o sólido, denominada tensão de compressão. Analogamente a  $S_y$ ,  $S_x$  também estará comprimindo negativamente e tracionando positivamente. A tensão de cisalhamento  $S_{xy}$  ou chamada também de tensão de distorção tende a rotacionar ou distorcer a estrutura pontualmente, sendo positiva no sentido anti-horário e negativa no sentido horário.

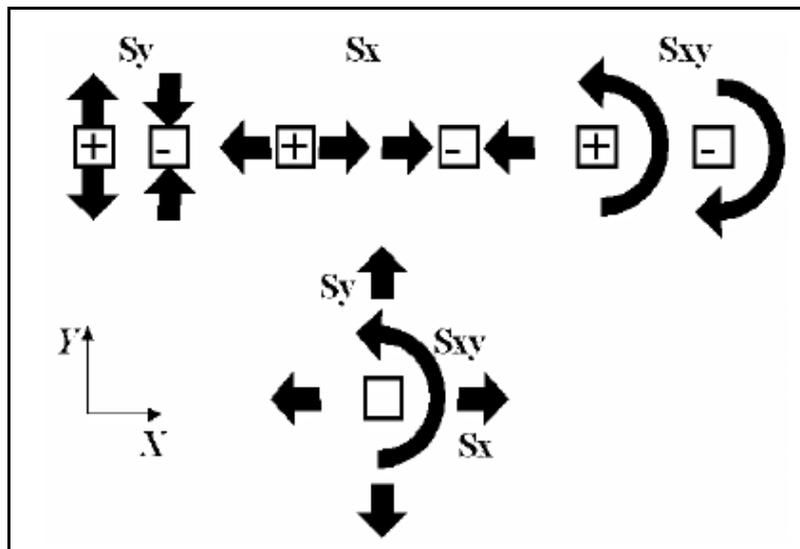


Figura 20 – Representação Estado Triaxial de Tensões  
Fonte: Shigley

A combinação de  $S_x$ ,  $S_y$  e  $S_{xy}$  que define o estado triaxial de tensões em sua totalidade.

### 3.3.2 - Resultados

Os resultados são apresentados por diagramas e figuras ilustrativas do Pós processamento do ProE que mostram na tela tensão/deformação, com a distribuição de tensões e seus respectivos valores numéricos. A Análise realizada neste trabalho é dita qualitativa, onde diretamente nas figuras consegue-se visualizar através de um gráfico de cores a distribuição de tensões, mostrando claramente onde os pontos de maior intensidade determinam a maior concentração de tensões. A tensão visualizada já é a própria tensão de Von Misses, dada em (MPa).

O estudo está dividido em quatro configurações como já descrito anteriormente:

- Configuração A: Preparo cavitário MOD, Tratamento Endodontico com Resina Z250 e Pino de fibra de Vidro.
- Configuração B: Preparo cavitário MOD, Tratamento Endodontico com Resina Z250 e Pino de Zircônio.
- Configuração C: Preparo cavitário MOD, Tratamento Endodontico com Resina Flow Revolution e Pino de fibra de Vidro.
- Configuração D: Preparo cavitário MOD, Tratamento Endodontico com Resina Flow Revolution e Pino de Zircônio.

Configuração	Tensão Von Misses (Mpa)
A	45,00
B	44,69
C	34,76
D	34,25

Tabela 2 – Resultado Tensão Von Misses

Configuração A:

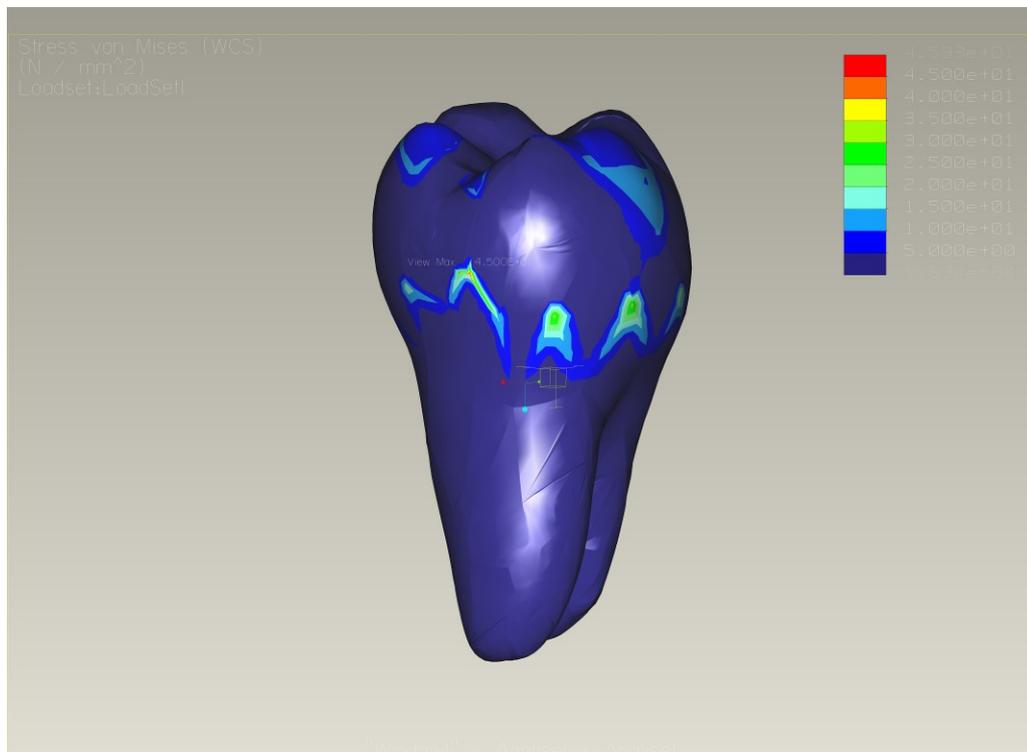


Figura 21 – Concentração de Tensões Configuração A  
Fonte: O Autor (2008)

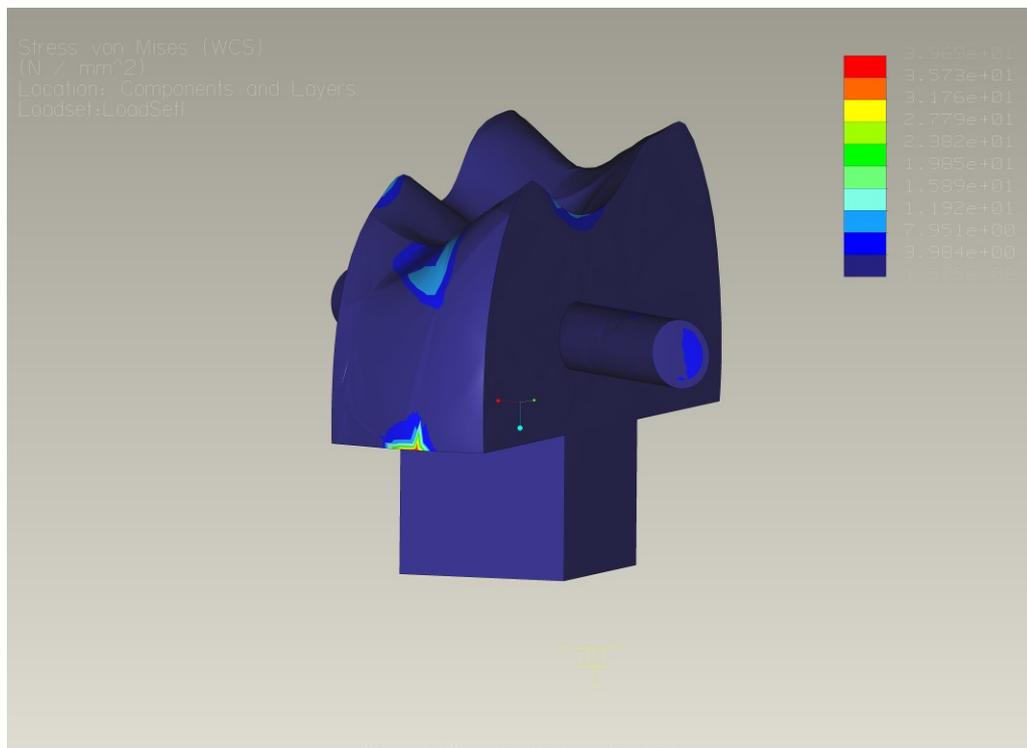


Figura 22 – Concentração de Tensões Configuração A sem coroa  
Fonte: O Autor (2008)

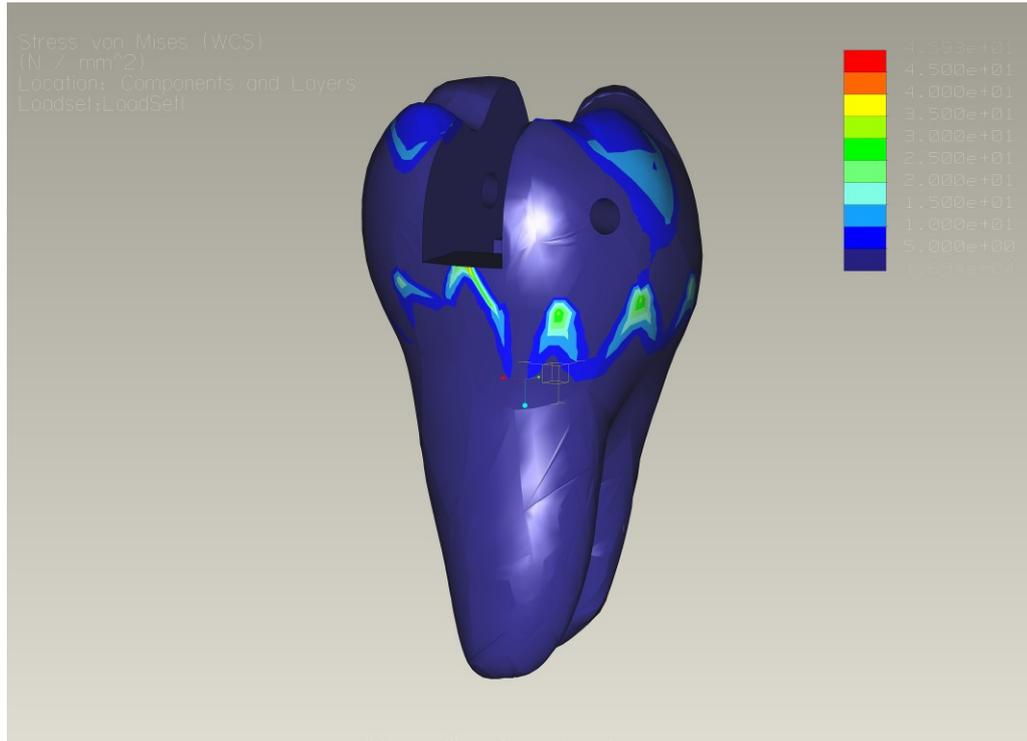


Figura 23 – Concentração de Tensões Configuração somente a Coroa  
Fonte: O Autor (2008)

As figuras ilustrativas das concentrações de tensão para a configuração A mostram que a estrutura dentária que sofrera um tratamento endodôntico através de um preparo cavitário MOD sendo restaurado com Resina FITEK Z250 e também com a adição de um pino de fibra de vidro transfixado horizontalmente teve como resposta um nível de tensão Von Misses de 45,00 MPa. Além disso, também pode ser percebido que as concentrações de tensão se manifestam mais profundamente ao longo da superfície externa do dente, mostrando que a resistência da estrutura interna não é abalada com este tipo de tratamento.

Configuração B:

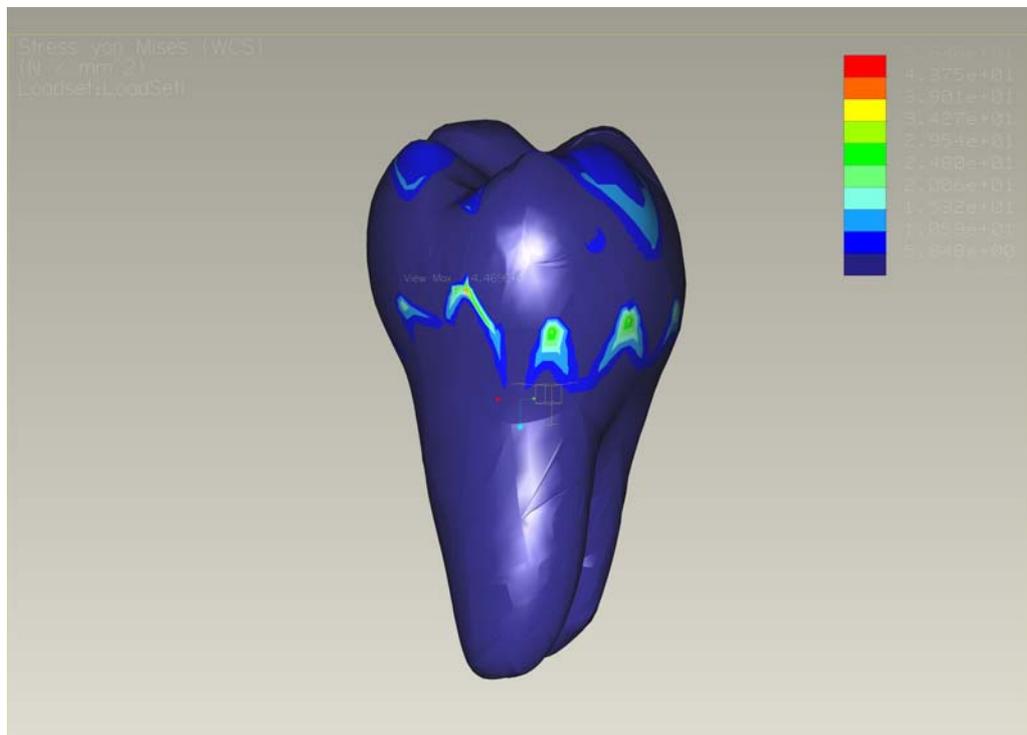


Figura 24 – Concentração de Tensões Configuração B  
Fonte: O Autor (2008)

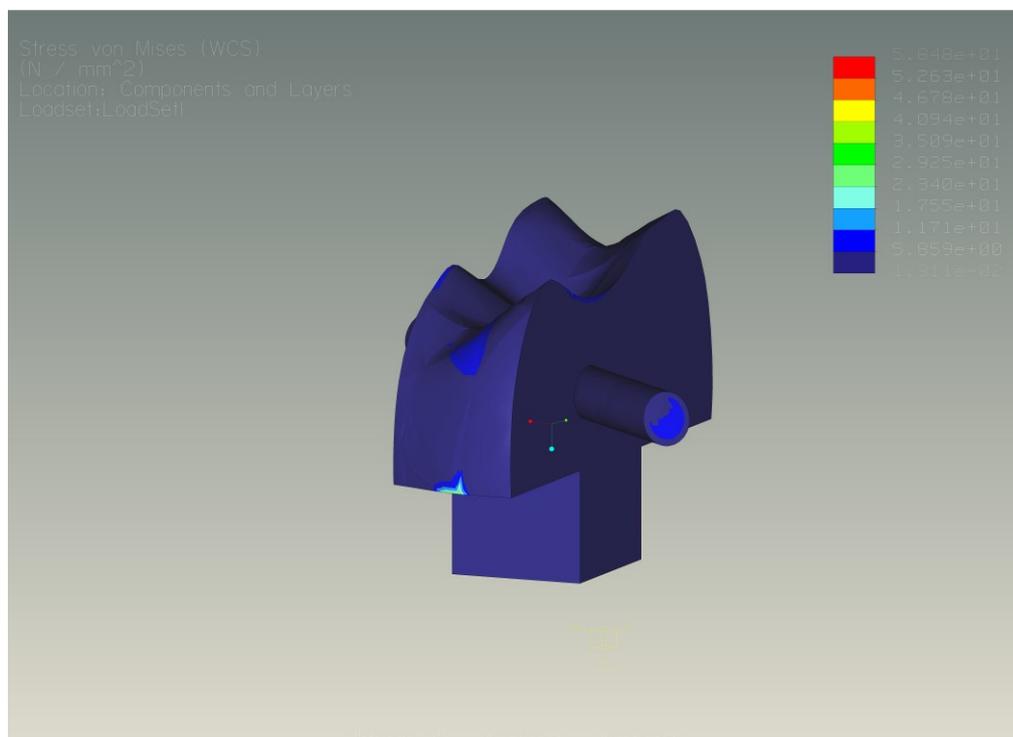


Figura 25 – Concentração de Tensões Configuração B sem Coroa  
Fonte: O Autor (2008)

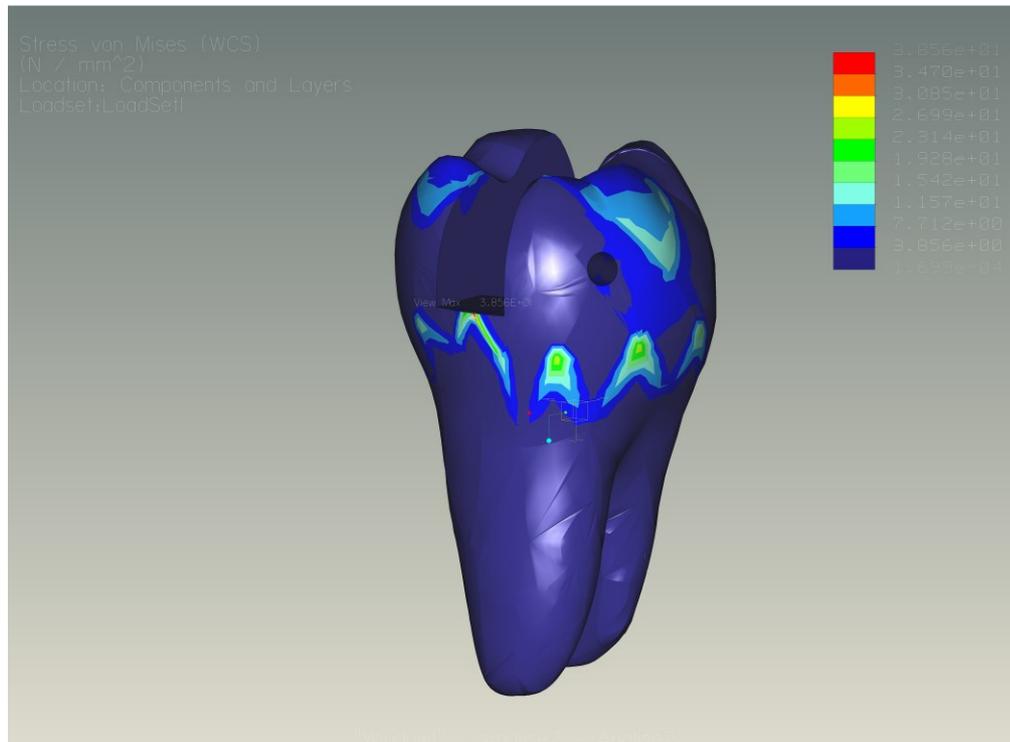


Figura 26 – Concentração de Tensões Configuração B somente a Coroa  
Fonte: O Autor (2008)

As figuras ilustrativas das concentrações de tensão para a configuração B mostram que a estrutura dentária que sofrera um tratamento endodôntico através de um preparo cavitário MOD sendo restaurado com Resina FITEK Z250 e também com a adição de um pino de Zircônio transfixado horizontalmente obteve como resposta nível de tensão Von Misses de 44,69 MPa. Ao longo da superfície externa do dente visualiza-se que há uma concentração de tensões um pouco menores que as concentrações da configuração A.

## Configuração C:

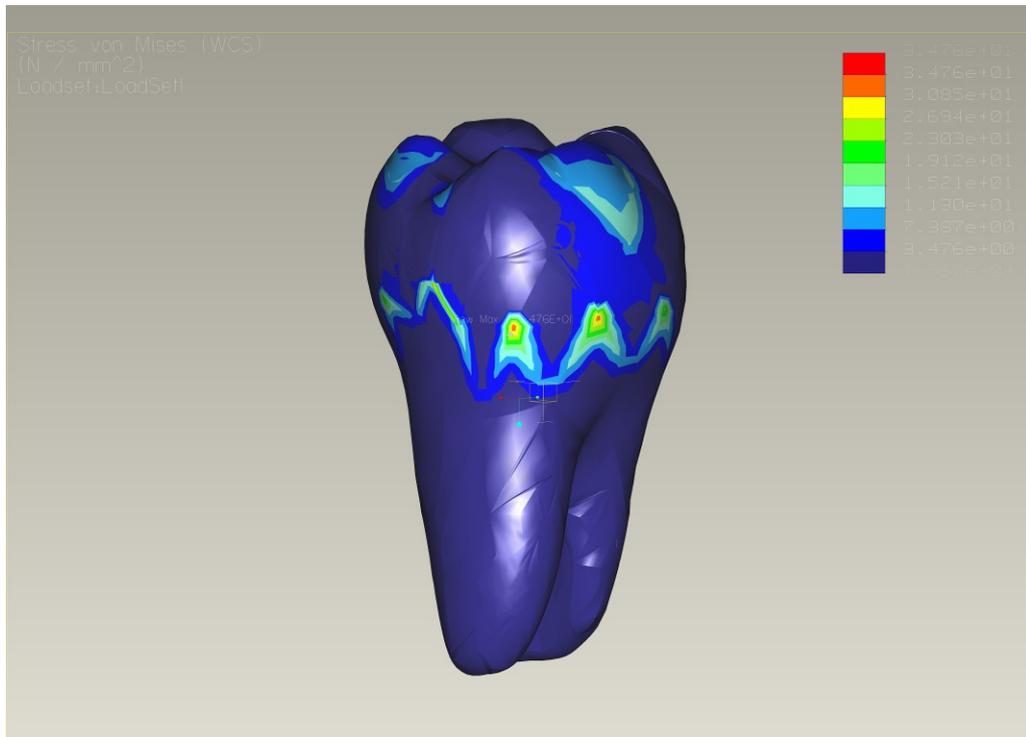


Figura 27 – Concentração de Tensões Configuração C  
Fonte: O Autor (2008)

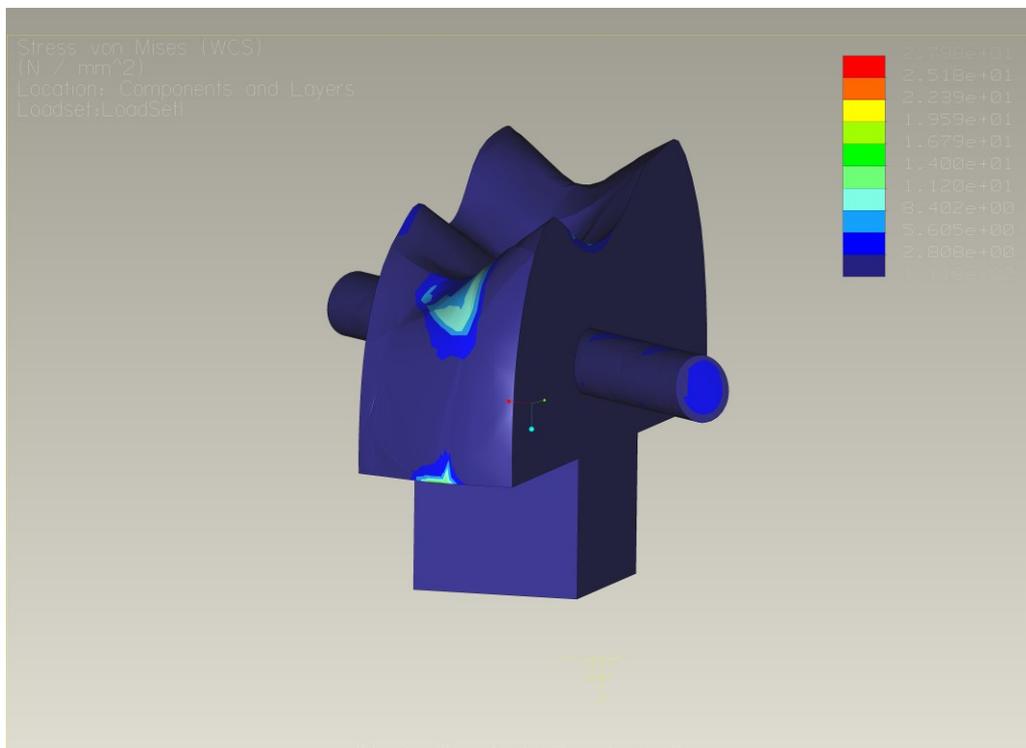


Figura 28 – Concentração de Tensões Configuração C sem Coroa  
Fonte: O Autor (2008)

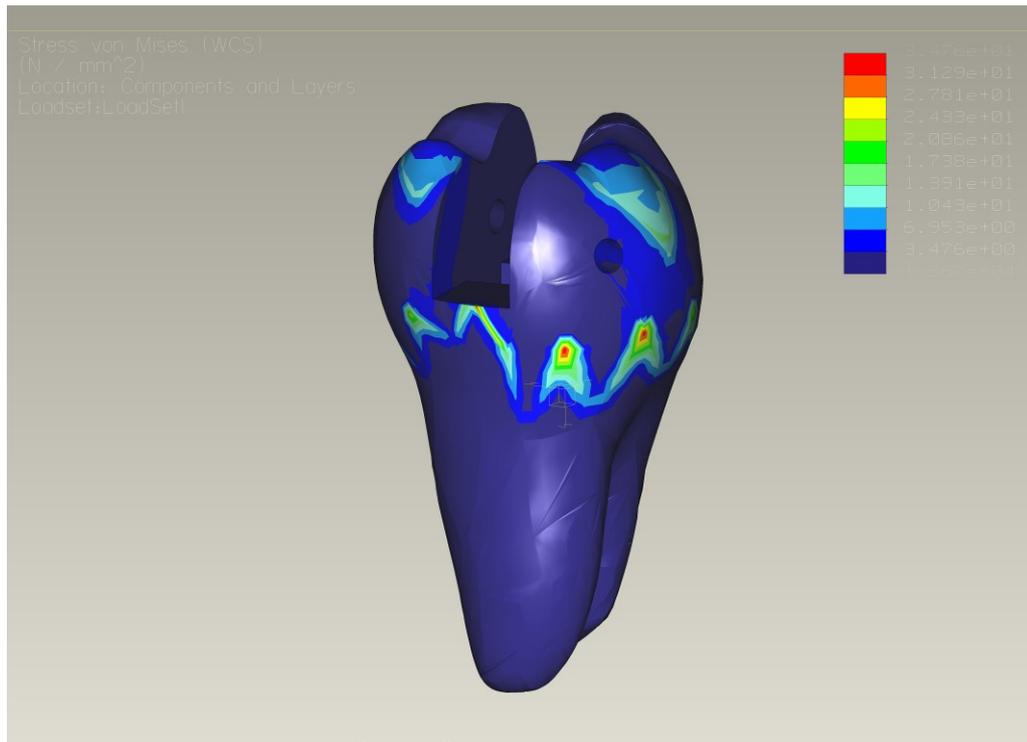


Figura 29 – Concentração de Tensões Configuração C somente a Coroa  
Fonte: O Autor (2008)

As figuras ilustrativas das concentrações de tensão para a configuração C mostram que a estrutura dentária que sofrera um tratamento endodôntico através de um preparo cavitário MOD sendo restaurado com Resina Flow Revolution e também com a adição de um pino de fibra de vidro transfixado horizontalmente teve como resposta um nível de tensão Von Mises de 34,76 MPa. Apesar de ter um valor abaixo dos níveis de tensão Von Mises encontrados nas outras duas configurações ao longo da superfície externa da estrutura dentária é visível uma concentração de tensão mais significativa que a vista antes, também há uma pequena concentração de tensões na parte interna onde é realizado o preparo cavitário MOD.

## Configuração D:

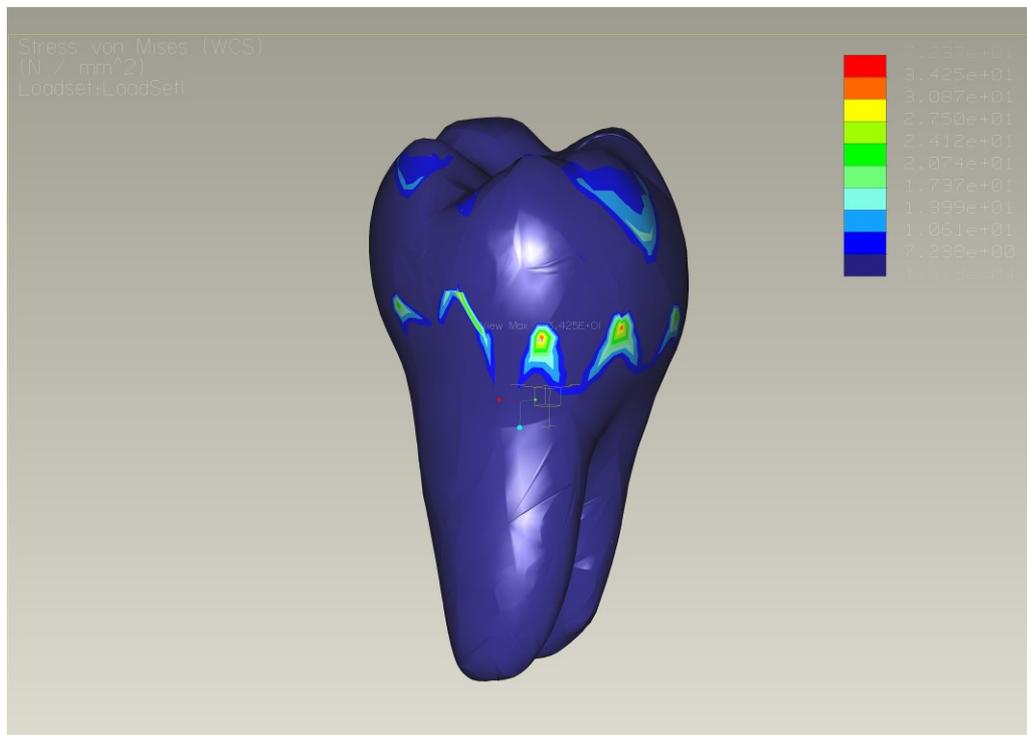


Figura 30 – Concentração de Tensões Configuração D  
Fonte: O Autor (2008)

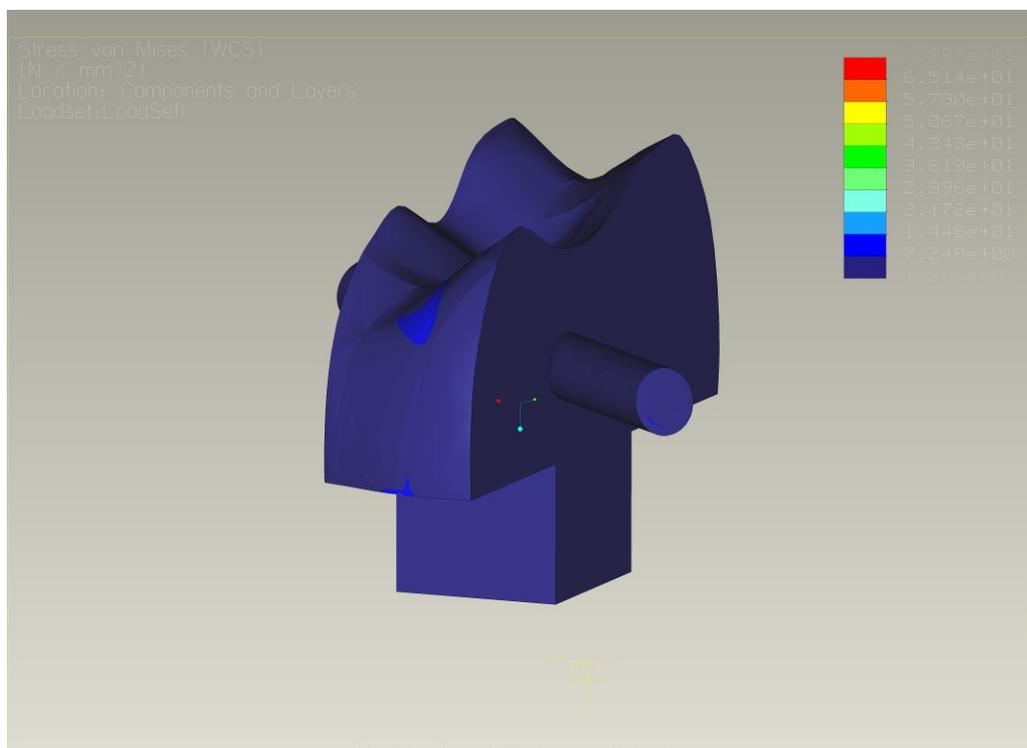


Figura 31 – Concentração de Tensões Configuração D sem Coroa  
Fonte: O Autor (2008)

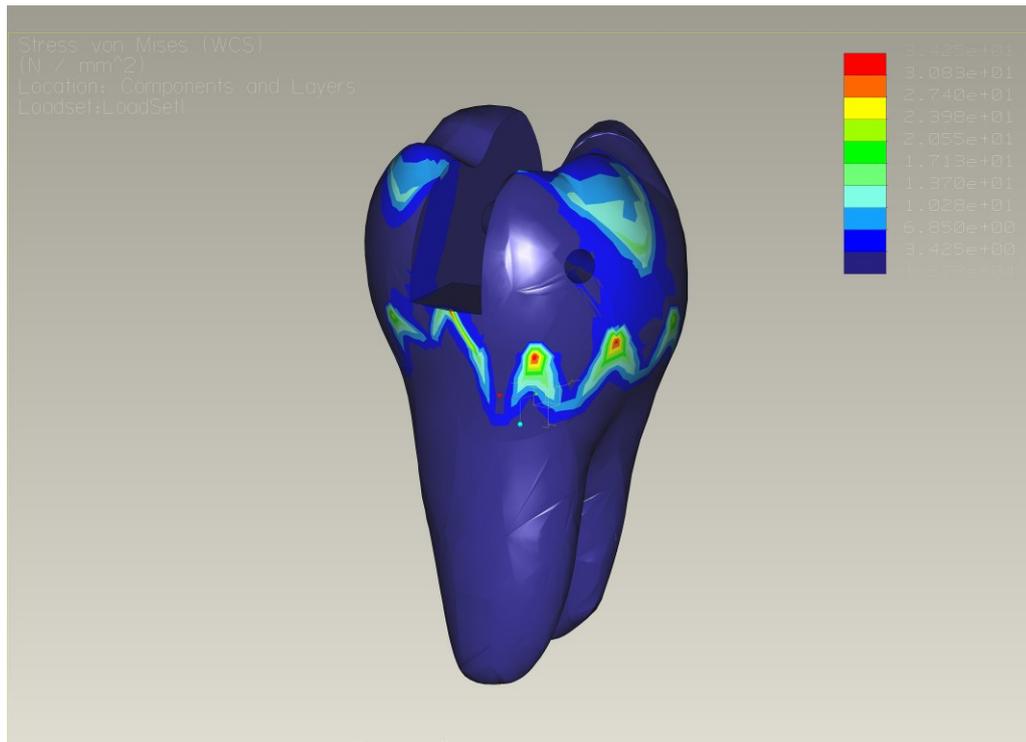


Figura 32 – Concentração de Tensões Configuração D somente Coroa  
Fonte: O Autor (2008)

As figuras ilustrativas das concentrações de tensão para a configuração D mostram que a estrutura dentária que sofrera um tratamento endodôntico através de um preparo cavitário MOD sendo restaurado com Resina Flow Revolution e também com a adição de um pino de Zircônio transfixado horizontalmente teve como resposta um nível de tensão Von Mises de 34,25 MPa. Apesar de ter o menor dos níveis de tensão Von Mises encontrados nas outras configurações, também é visível um maior gradiente de concentração de tensões ao longo da superfície externa, e também há um pequeno aumento de concentração de tensões internamente no preparo cavitário MOD.

#### 4 – CONCLUSÃO

Os resultados obtidos com a análise de elementos finitos são bem claros e perceptíveis quanto a níveis de tensão Von Misses encontrado em cada configuração. O dente foi submetido a um tratamento endodôntico realizado através de um preparo cavitário MOD e restaurado com dois modelos de resinas com adição de pinos transfixados horizontalmente para analisar a diferença entre níveis de concentração de tensões na estrutura modificada. A configuração A com resina FITEK Z250 e pino de fibra de vidro mostra que possui uma maior valor de concentração de tensão comparada as demais configurações, propiciando uma magnitude de tensão Von Misses de 45,00 MPa. A configuração B, tendo uma alteração em relação à configuração A da substituição do pino de fibra de vidro pelo pino de zircônio ficou mostrou um pequeno decréscimo de concentração de tensão ficando o valor de tensão Von Misses com 44,69 MPa, provando que a diferença de propriedades mecânicas entre os dois pinos não tem tanta influência na adição de resistência a estrutura dentária. As configurações C e D também são estruturas dentárias submetidas a um tratamento endodôntico realizado através de um preparo cavitário MOD sendo restaurado com a resina Flow Revolution mais o pino transfixado horizontalmente de fibra de vidro e zircônio respectivamente. Os resultados mostraram que a resina Flow Revolution adiciona resistência à estrutura dentária em relação a resina FITEK Z250, ficando a mesma diferença de valores para níveis de tensão em torno da alteração do pino, ficando a configuração C com pino de fibra de vidro onde foi encontrado nível de concentração de tensões de 34,76 MPa e configuração D com pino de zircônio foi encontrado um nível de concentração de tensões de 34,25 MPa.

Com estes resultados foi possível perceber que há uma variação nos valores encontrados de níveis de concentração de tensões nas quatro configurações. Quanto menores os valores de tensão Von Misses encontrados, conseqüentemente maior resistência terá a estrutura. A configuração D com restauração sendo feita com a resina Flow Revolution adicionado do pino de Zircônio transfixado horizontalmente provém resultados melhores em termos estruturais perante as outras configurações, ficando evidente que a troca de pinos não influi significativamente em valores, porém a troca de resina possui certa influência para adicionar ou reduzir a resistência da estrutura dentária.

## 5 – DISCUSSÃO

A primeira intenção deste estudo era de analisar uma estrutura dentária que sofresse um tratamento endodôntico através de um preparo MOD sendo restaurado não apenas com resina composta e pinos distintos, mas também com um adesivo restaurador de 25 µm entre o preparo cavitário MOD e a resina composta para que pudesse ser avaliado também sua adição de resistência à estrutura que pudesse haver. A não capacidade do software utilizado na análise, no caso ProE, para gerar e trabalhar com malhas cada vez menores e melhores não possibilitou o estudo completo, porém grandes conclusões a respeito da adição de materiais distintos na resistência à estrutura dentária podem ser retiradas deste trabalho.

Para trabalhos futuros, no qual a acuracidade dos resultados é imprescindível e a necessidade de obter malhas cada vez melhores na simulação de elementos finitos, é necessário buscar e pesquisar sobre softwares que possam dar uma melhor resposta em relação a geração de malhas de elementos finitos propriamente dito. Atualmente estão surgindo softwares cada vez mais sofisticados para análise cada vez mais complexas não dificultando tanto assim estes tipos de estudos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos: A base da Tecnologia CAE**. São Paulo, Érica, 2000.

(4) **ATTAR ET AL. Flow, Strength, Stiffness and Radiopacity of Flowable Resin Composites**, *Journal de l'Association dentaire canadienne*, Septembre 2003, Vol. 69, N° 8, p.516-521.

BELTRÃO, MARIA CECILIA GOMES. **Influência Da Transfixação Horizontal Por Um Pino De Fibra De Vidro Na Resistência À Fratura De Molares Endodenticamente Tratados**. Tese (Programa de Mestrado em Odontologia). Faculdade de Odontologia, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande Sul, 2007.

BURSTONE, C. J.; PRYPUTNIEWICZ, R. J. **Holographic determination of centers of rotation produced by orthodontic forces**. *Am J Orthod*, St. Louis, v. 77, Apr. 1980.

CHANDRUPATLA, TIRUPATHI R. and BELENGUDU, ASHOK D. **Introduction to finite elements in engineering**, New Jersey, Prentice Hall 1997.

FIALHO, ARIVELTO BUSTAMANTE. **Pro Engineer Wildfire 3.0: Teoria e Prática no desenvolvimento de Produtos Industriais. Plataforma para Projetos CAD/CAM/CAE**. São Paulo, Érica, 2006.

(1) GHASSEMIEH, E. **Evaluation of sources of uncertainties in microtensile bond strength of dental adhesive system for different specimen geometries**, *Dental Mater* (2007), doi:10.1016/j.dental.2007.06.022.

HUEBNER, KENNETH H. and THORNTON, EARL A. **The Finite Element Method for Engineers**, New York, NY : J. Wiley, 1982.

(3) IVOCLAR VIVADENT AG, **Research and Development Scientific Service**, Bendererstrasse 2, FL – 9494 Schaan Liechtenstein, Nov 2002.

JANTARAT J, PANITVISAI P, PALAMARA JE, MESSER HH. **Comparison of methods for measuring cuspal deformation in teeth**. *J Dent* 2001;29:75–82.

(2) MACERI, F. **Mechanical behaviour of endodontic restorations with multiple prefabricated posts: A finite-element approach**, *Journal of biomechanics* (2006).

MAGNE, PASCAL. **Efficient 3D finite element analysis of dental restorative rocedures using micro-CT data**. University of Southern California, Division of Primary Oral Health Care, School of Dentistry Los Angeles, United States, Março 2005.

PANITVISAI P, MESSER HH. **Cuspal deflection in molars in relation to endodontic and restorative procedures**. J Endod 1995;21:57–61.

(5) **PLACIDO ET AL. Shear versus micro-shear bond strength test: A finite element stress analysis**, Dental Mater, v.23, p. 1086-1092, (2007).

PTC - [www.ptc.com/proe](http://www.ptc.com/proe) - Fundamentals of Pro Mechanica.

REN, Y.; MALTHA, J. C.; KUIJPERS-JAGTMAN, A. M. **Optimum force magnitude for orthodontic tooth movement: a systematic literature review**. Angle Orthod, Appleton, v. 73, no. 1, p. 86-92, Jan. 2003

RIBEIRO, JOÃO PAULO FILGUEIRAS. **Análise Pelo Método Dos Elementos Finitos, Da Distribuição De Tensões Com E Sem Remanescente Coronário, Utilizando Diferentes Pinos Intra-Radiculares**. (Programa de Mestrado em Odontologia na área de Clínica Integrada) Faculdade de Odontologia, Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2004.

RODRIGUES, FAUSTO BORGES. **Resistência À Fratura De Dentes Com Preparos Cavitários Mod Restaurados Com Resina Composta E Fibra De Vidro**. Tese (Programa de Mestrado em Odontologia). Faculdade de Odontologia, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande Sul, 2007.

RUBIN, C. et al. **Stress analysis of the human tooth using a threedimensional finite element model**. J Dent Res, Washington, v. 62, no. 2, p. 82-86, Feb. 1983

SEGUNDO, REGÊNIO M. H. **Comparação Da Distribuição De Tensões Em Dois Tipos De Conexão Protética De Implantes Com Parafusos Diferentes Utilizando O Método De Análise De Elementos Finitos Com Modelo Tridimensional**. Tese (Programa De Mestrado Em Odontologia Área De Concentração Materiais Dentários), Faculdade de Odontologia, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande Sul, 2006.

SHIGLEY, J.E.; MISCHKE, C.R., BUDINAS, R.G., **Projeto de Engenharia Mecânica**, Porto Alegre, Bookman, 2005.

SILVA, ISAAC N. L. **Notas de Aula (CAE)**, Departamento de Engenharia Mecânica e Mecatrônica – PUCRS, Porto Alegre, 2006.

STEYN, C. L.; VERWOERD, W. S.; VAN DER MERWE, E. J.; FOURIE, O. L. **Calculation of the position of the axis of rotation when single-rooted teeth are orthodontically tipped.** Br J Orthod, Oxford, v. 5, no. 3, p. 153-156, Jul. 1978.

TOOGOOD, ROGER. **Pro/MECHANICA Structure Tutorial.** Mechanical Engineering University of Alberta. Edmonton, Alberta 7 July 2000