PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE MATEMÁTICA

SCHEYLA LIMA VIEIRA PINTO

MODELOS MATEMÁTICOS PARA O ÍNDICE DE DESENVOLVIMENTO HUMANO DOS ESTADOS BRASILEIROS

Porto Alegre
2013

SCHEYLA LIMA VIEIRA PINTO

MODELO MATEMÁTICO PARA O INDICE DE DESENVOLVIMENTO HUMANO DOS ESTADOS BRASILEIROS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Matemática com ênfase em Matemática Empresarial pela Faculdade de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Eliete Biasotto Hauser

Porto Alegre
2013

SCHEYLA LIMA VIEIRA

MODELO MATEMÁTICO PARA O INDICE DE DESENVOLVIMENTO HUMANO DOS ESTADOS BRASILEIROS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Matemática com ênfase em Matemática Empresarial pela Faculdade de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Aprovada em: 05 de dezembro de 2013.

BANCA EXAMINADORA:

Eliete Biasotto Hauser

Vandoir Stormowski

Maria Beatriz M. Castilhos

Porto Alegre
2013

Dedico trabalho de conclusão de curso primeiramente a Deus, que me deu força durante todo curso. Ao meu esposo, que sempre esteve ao meu lado, me apoiando, e a toda a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha orientadora, Professora Eliete Biasotto Hauser, pelo auxílio e dedicação durante a composição deste trabalho.

Aos Professores da Banca pela disponibilidade e aos colegas de curso pelo apoio e incentivo.

“A imaginação é mais importante que a ciência, porque a ciência é limitada, ao passo que a imaginação abrange o mundo inteiro”.

Albert Einstein

RESUMO

Neste trabalho de pesquisa analisam-se o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) das unidades da federação brasileira, utilizando modelagem matemática, em três abordagens: numérica, analítica e matricial.

Com a abordagem numérica, determinaram-se parâmetros adequados para os modelos, Logístico e Quadrático, por meio da aplicação do Critério dos Mínimos Quadrados (CMQ), no Índice de Desenvolvimento Humano Municipal médio entre os anos de 1991 a 2010, nas unidades da federação. Esses dois modelos foram considerados válidos, pois forneceram estimativas próximas do IDH brasileiro do ano de 2012, disponibilizado pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD), o que não ocorreu com outros modelos testados. A mesma análise foi utilizada para as dimensões do IDHM: Renda, Longevidade e Educação.

A solução exata da equação diferencial logística foi obtida pela técnica de separação de variáveis e decomposição em frações parciais. Isso permitiu comparar estimativas futuras feitas com os métodos numéricos, relativas ao valor do IDHM.

Utilizou-se ainda, a modelagem por Sistemas Dinâmicos Discretos para os dados relativos à Renda e à Longevidade. Isso possibilitou estimar a distribuição dos estados brasileiros em termos da classificação do IDHM.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Índice de Desenvolvimento Humano Municipal. Critério dos mínimos quadrados. Sistemas Dinâmicos Discretos, Modelo Logístico.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS 5
RESUMO 7
SUMÁRIO 8
1. INTRODUÇÃO 10
2. ASPECTOS TEÓRICOS DO IDH 12
2.1. Índice de desenvolvimento humano municipal (IDHM) 13
2.1.1. Cálculo do IDHM 14
2.1.2. Análise do IDHM 24
3. MODELAGEM MATEMÁTICA 25
4. MODELAGEM NUMÉRICA 27
4.1. Ajuste de funções: 28
4.1.1. Ajuste por função Linear: 28
4.1.2. Ajuste por função Logística 29
4.1.3. Ajuste por função Quadrática: 29
4.2. Modelagem pelo critério dos mínimos quadrados para IDHM médio 30
4.2.1. Ajuste por função Quadrática Q(t) 31
4.2.2. Ajuste por função Logística L(t) 32
4.2.3. Comparação dos resultados Q(t) e L(t) 33
4.3. IDHM – Renda Médio 35
4.3.1. Modelo Quadrático $Q_r(t)$ 35
4.3.2. Modelo Logístico $L_r(t)$ 36
4.3.3. Comparação entre os modelos $Q_r(t)$ e $L_r(t)$ 37
4.4. IDHM – Longevidade Médio 38
4.4.1. Modelo Quadrático $Q_l(t)$ 38
4.4.2. Modelo Logístico $L_l(t)$ 39
4.4.3. Comparação entre os modelos $Q_l(t)$ e $L_l(t)$ 40
4.5. IDHM – Educação Médio 41
4.5.1. Modelo Quadrático $Q_e(t)$ 41
4.5.2. Modelo Logístico $L_e(t)$ 42
4.5.3. Comparação dos modelos $Q_e(t)$ e $L_e(t)$ 43
4.6. Comparação Gráfica dos Modelos Quadráticos 44
4.7. Comparação Gráfica dos Modelos Logísticos 45
5. MODELAGEM ANALÍTICA: EQUAÇÃO DIFERENCIAL LOGÍSTICA 47
5.1. Solução Analítica para o IDHM médio 50
5.2. Solução Analítica para o IDHM – Renda médio 51
5.3. Solução Analítica para o IDHM – Longevidade médio 53
5.4. Solução Analítica para o IDHM – Educação médio 54
5.5. Estimativas futuras para o IDHM e dimensões 56
6. MODELAGEM MATRICIAL 57
6.1. Modelagem por Sistemas Dinâmicos Discretos para IDHM - Renda 59
6.2. Modelagem por Sistemas Dinâmicos Discretos para IDHM – Longevidade 64
7. CONCLUSÃO 69
REFERÊNCIAS 71

ANEXOS 73
ANEXO A 73
ANEXO B 88

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo a realização de um estudo sobre o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) dos estados brasileiros e Distrito Federal (DF). O índice de Desenvolvimento Humano dos estados é calculado por meio do índice municipal e por isso adota-se a sigla IDHM. Para tal estudo, utiliza-se os dados disponibilizados pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD).

O índice de cada estado varia de zero a um. Zero significa nenhum desenvolvimento humano, e um, desenvolvimento humano total. A partir do estudo desses dados e através da utilização de modelagem matemática, pretende-se encontrar um modelo matemático para fazer previsões do IDHM e dimensões das unidades da federação para anos futuros.

O conceito de Desenvolvimento Humano tem seu foco na qualidade de vida da população para isso considera características sociais, culturais e políticas. Diferentemente da perspectiva do crescimento econômico, que vê o bem-estar de uma sociedade apenas pelos recursos ou pela renda que ela pode gerar, o IDH leva em consideração três dimensões: Educação, Longevidade e Renda de uma população, uma vez que temos tais informações, podemos atuar mais, detectando onde estão as deficiências dos estados brasileiros e assim redistribuir melhor os recursos e criar políticas públicas eficientes (PNUD 2012).

No capítulo 2, apresenta-se o resumo sobre o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) e o Índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM), destacando-se alguns aspectos relevantes em sua composição. Mostra-se, ainda, uma breve descrição dos indicadores que compõem as dimensões: Renda, Longevidade e Educação, e tabelas do IDHM médio das unidades da Federação dos anos de 1991, 2000 e 2010, com seus respectivos gráficos. O capítulo encerra-se com uma análise sobre a percentagem de crescimento do IDHM das umidades da Federação.

Descrevem-se, no capítulo 3, algumas definições de modelagem matemática e como se desenvolveram suas etapas no decorrer deste trabalho. Nos capítulos 4, 5 e 6, apontam-se as modelagens utilizadas neste estudo: modelagem numérica, modelagem analítica e modelagem matricial, respectivamente.

Para a modelagem numérica, utilizou-se o critério de mínimos quadrados e foram eleitos modelos que melhor se adaptavam ao IDHM. Para a modelagem analítica, realizou-se a análise utilizando a equação diferencial logística, por sua aplicabilidade em processos envolvendo populações, que tem uma capacidade limitada (capacidade de suporte). Na modelagem matricial, empregou-se a teoria de sistemas dinâmicos discretos para as dimensões Renda e Longevidade.

No capítulo 7, apresentam-se conclusões e perspectivas de continuidade desse estudo.

2. ASPECTOS TEÓRICOS DO IDH

Criado pelo economista paquistanês Mahbub ul Haq, com a colaboração de outros economistas, o IDH foi publicado pela primeira vez em 1990, e a partir daí tem seu índice calculado anualmente. Em 1998 foi publicado pela primeira vez o índice de Desenvolvimento Humano Municipal, (IDHM), a partir dos dados dos censos de 1970, 1980 e 1991. Estes índices são muito utilizados no Brasil, pelo governo federal e por administrações regionais, e podem ser consultados nas respectivas edições do Atlas do Desenvolvimento Humano do Brasil, que compreende um banco de dados eletrônico com informações socioeconômicas sobre todos os municípios e estados do país e Distrito Federal. (PNUD 2012)

O IDH surgiu com a finalidade de confrontar o indicador Produto Interno Bruto (PIB) per capita, que considera somente a dimensão econômica do desenvolvimento. O IDH, além de considerar a dimensão Renda, ainda leva em consideração mais duas: Educação e Longevidade, pois tem como objetivo a qualidade de vida de uma população (PNUD 2012).

De acordo com Rotta e Reis[1] (2007 citado por REIDEL, 2012, p.22).

> A ideia de desenvolvimento nasceu associada ao projeto da modernidade que previa a emancipação do ser humano e da sociedade em relação aos preceitos da tradição, do pensamento mágico e da religião, através da afirmação da capacidade do ser humano gerir sua própria historicidade pelo uso da razão. A afirmação da modernidade rompeu as formas tradicionais de pertencimento e proteção social, exigindo a produção de novos mecanismos e instrumentos que deram origem às políticas sociais.

Com base na emancipação do ser humano, surgiu o IDH, com a premissa de que as pessoas são a verdadeira riqueza da nação, e com o intuito de levantar discussões em torno de políticas públicas que coloquem as pessoas no centro das estratégias, sugestões estas que constam no Relatório de Desenvolvimento Humano (RDH).

[1]ROTTA, E.; REIS. Desenvolvimento e políticas sociais: uma relação necessária. Revista Textos & Contextos, v. 6 n. 2. 2007.331p

2.1. Índice de desenvolvimento humano municipal (IDHM)

Conforme (PNUD 2013), o Índice de Desenvolvimento Humano dos municípios e estados brasileiros é calculado a partir de uma adaptação do cálculo do IDH. Esta adaptação foi criada em 1998 para refletir a realidade dos municípios e por isso é chamada de Índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM). Como os dados para cálculo dos índices de desenvolvimento dos Estados no Brasil utilizam a mesma metodologia, que será explicitada a seguir, utilizaremos a nomenclatura IDHM para nosso estudo, que envolve os estados brasileiros e o Distrito Federal.

Apesar de preservar as dimensões Longevidade, Educação e Renda, os indicadores para o cálculo do IDH e IDHM diferem. A principal diferença é a fonte de dados. Enquanto o IDH utiliza dados do departamento de assuntos econômicos e sociais da Organização das Nações Unidas (ONU), Instituto de estatística da Organização das Nações Unidas para a educação, a ciência e a cultura (UNESCO), Banco Mundial e Fundo Monetário internacional, o IDHM utiliza os dados extraídos dos Censos Demográficos do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). (PNUD - Atlas, 2013).

Tabela 1: Diferença dos indicadores do IDH e IDHM

	LONGEVIDADE	**EDUCAÇÃO**		**RENDA**
		População Adulta	**População Jovem**	
IDHM Brasil	Esperança de vida ao nascer	18+ com fundamental completo	. % 5-6 na escola . % 11-13 nos anos finais do fundamental . % 15-17 c/ fundamental completo . % 18-20 c/ médio completo	Renda mensal *per capita* (em R$ ago/2010)
IDH Global	Esperança de vida ao nascer	Média de anos de estudo de 25+	Anos Esperados de Estudos	Renda Média Nacional *per capita* (US$ ppp2005)

Fonte: Atlas de desenvolvimento Humano no Brasil – PNUD 2013.

Na tabela 1, estão representadas as diferenças do IDH e IDHM nas dimensões Renda, Longevidade e Educação.

2.1.1. Cálculo do IDHM

As informações desta seção foram escritas com base no Atlas de Desenvolvimento Humano 2013, que traz informações atualizadas do cálculo do IDHM. O cálculo do IDHM foi modificado em 2010 com o objetivo de melhor retratar o contexto brasileiro. Os dados utilizados neste estudo já estão adaptados ao novo cálculo.

A classificação do IDHM varia de zero a um, na seguinte classificação:

- De zero a 0,499 - Muito Baixo;
- De 0,500 a 0,599 - Baixo;
- De 0,600 a 0,699 - Médio;
- De 0,700 a 0,799 - Alto;
- De 0,800 a 1 – Muito Alto.

O cálculo do IDHM é realizado por meio da média geométrica das dimensões Renda, Longevidade e Educação com o mesmo peso.

$$\text{IDHM} = \sqrt[3]{IDHM_{renda} \times IDHM_{longevidade} \times IDHM_{educação}}$$

A média geométrica foi adotada em 2010, pois reduz o nível de substituição entre as dimensões evitando que um baixo desempenho em uma dimensão seja compensado pelo elevado desempenho em outra.

Para a avaliação da dimensão Renda, o critério usado é a renda municipal *per capita*, ou seja, a média aritmética de cada residente no município. Para se chegar a esse valor, soma-se a renda de todos os residentes e divide-se o resultado pelo número de pessoas que moram no município (inclusive crianças ou pessoas com renda igual a zero).

Para a dimensão Longevidade, é considerada a esperança de vida ao nascer, um indicador estreitamente associado às condições sociais e econômicas de uma população. Esse indicador mostra o número médio de anos que as pessoas viveriam a partir do nascimento, mantidos os mesmos padrões de mortalidade observados no ano de referência, sintetizando as condições de saúde e salubridade do local, uma vez que quanto mais mortes houver nas faixas etárias mais precoces, menor será a expectativa de vida. O cálculo é feito pelo IBGE e as informações constam nas Tábuas de Mortalidade da população Brasileira, disponível em:

http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/tabuadevida.

Para realizar o cálculo da dimensão Educação do IDHM, é calculada a média geométrica de dois indicadores, um que mede a escolaridade da população adulta, e possui peso 1, e outro que mede a população em idade escolar, com peso 2. O primeiro é verificado pelo percentual de pessoas a partir de dezoito anos que concluíram o ensino fundamental. O segundo acompanha quatro momentos importantes da formação da população em idade escolar, e é calculado pela média aritmética:

- do percentual de crianças que frequentam a escola e com idades entre 5 e 6 anos;
- do percentual de jovens que frequentam do 6º a 9º ano do ensino fundamental com idades entre 11 e 13 anos;
- do percentual de jovens que possuem ensino fundamental completo com idades entre 15 e 17anos;
- do percentual de jovens que possuem ensino médio completo com idades entre 18 e 20 anos.

Os dados disponibilizados pelo PNUD em http://www.pnud.org.br/atlas/ranking do IDHM e indicadores Renda, Longevidade e Educação dos anos 1991, 2000 e 2010, foram ordenados em ordem alfabética e classificados por cores nas tabelas de 2 a 5. Os mesmos dados foram representados graficamente nas figuras de 1 a 4.

Cada cor representa nas tabelas, refere-se uma classificação do IDHM e dimensões e estão descritas nas legendas abaixo de cada tabela.

Tabela 2: IDHM dos Estados Brasileiros de 1991, 2000 e 2010.

	Unidade da Federação	IDHM (1991)	IDHM (2000)	IDHM (2010)
1	Acre	0,402	0,517	0,663
2	Alagoas	0,37	0,471	0,631
3	Amapá	0,472	0,577	0,708
4	Amazonas	0,43	0,515	0,674
5	Bahia	0,386	0,512	0,66
6	Ceará	0,405	0,541	0,682
7	Distrito Federal	0,616	0,725	0,824
8	Espírito Santo	0,505	0,64	0,74
9	Goiás	0,487	0,615	0,735
10	Maranhão	0,357	0,476	0,639
11	Mato Grosso	0,449	0,601	0,725
12	Mato Grosso do Sul	0,488	0,613	0,729
13	Minas Gerais	0,478	0,624	0,731
14	Pará	0,413	0,518	0,646
15	Paraíba	0,382	0,506	0,658
16	Paraná	0,507	0,65	0,749
17	Pernambuco	0,44	0,544	0,673
18	Piauí	0,362	0,484	0,646
19	Rio de Janeiro	0,573	0,664	0,761
20	Rio Grande do Norte	0,428	0,552	0,684
21	Rio Grande do Sul	0,542	0,664	0,746
22	Rondônia	0,407	0,537	0,69
23	Roraima	0,459	0,598	0,707
24	Santa Catarina	0,543	0,674	0,774
25	São Paulo	0,578	0,702	0,783
26	Sergipe	0,408	0,518	0,665
27	Tocantins	0,369	0,525	0,699

Fonte: PNUD (2012).

Legenda: classificação do IDHM

Muito Baixo

Médio

Muito alto

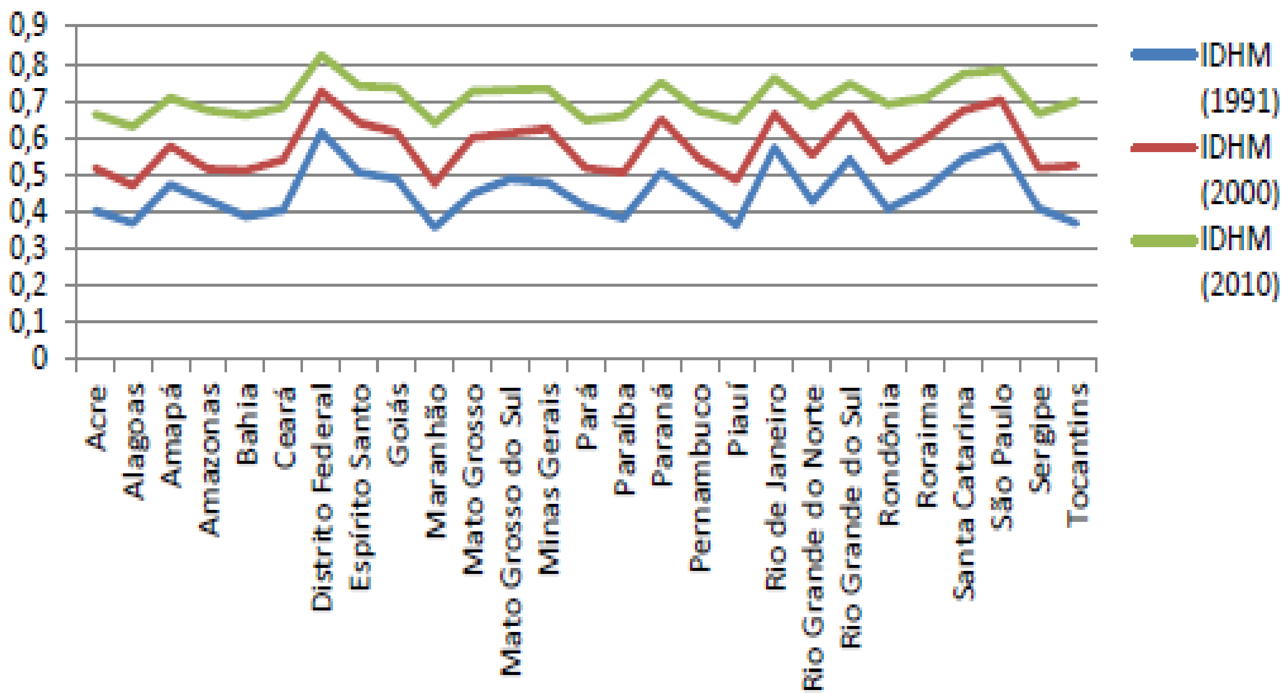
Baixo

Alto

Analisando a tabela 2, vemos que em 1991 a maior concentração dos estados estava na classificação muito baixo, representada na tabela pela cor laranja. Já em 2010, predominam a classificação médio, representada pela cor amarela e a classificação alto, representada pela cor lilás.

O gráfico a seguir, representado pela figura 1, mostra o IDHM das unidades de federação nos três anos, 1991, 2000 e 2010.

Figura 1 – IDHM das unidades da Federação



Fonte: A Autora.

O estado que mais cresceu no período de 1991 a 2010 foi o Piauí, 28,4%, mesmo assim, em 2010, ainda se encontrava na classificação médio.

Apesar de ter maior crescimento do período, em 1991 o Piauí se encontrava na situação muito baixo, enquanto alguns estados já estavam em classificações mais elevadas. É o caso do Rio de Janeiro, que apesar de ter tido o menor crescimento do período, 18,8%, em 1991 já estava na classificação baixo e em 2010 passou para alto, mesmo tendo a menor percentagem de crescimento.

A seguir vemos os dados do IDHM-Renda para o mesmo período.

Tabela 3: IDHM – Renda dos Estados Brasileiros de 1991, 2000 e 2010.

	Unidade da Federação	IDHM Renda (1991)	IDHM Renda (2000)	IDHM Renda (2010)
1	Acre	0,574	0,612	0,671
2	Alagoas	0,527	0,574	0,641
3	Amapá	0,62	0,638	0,694
4	Amazonas	0,605	0,608	0,677
5	Bahia	0,543	0,594	0,663
6	Ceará	0,532	0,588	0,651
7	Distrito Federal	0,762	0,805	0,863
8	Espírito Santo	0,619	0,687	0,743
9	Goiás	0,633	0,686	0,742
10	Maranhão	0,478	0,531	0,612
11	Mato Grosso	0,627	0,689	0,732
12	Mato Grosso do Sul	0,641	0,687	0,74
13	Minas Gerais	0,618	0,68	0,73
14	Pará	0,567	0,601	0,646
15	Paraíba	0,515	0,582	0,656
16	Paraná	0,644	0,704	0,757
17	Pernambuco	0,569	0,615	0,673
18	Piauí	0,488	0,556	0,635
19	Rio de Janeiro	0,696	0,745	0,782
20	Rio Grande do Norte	0,547	0,608	0,678
21	Rio Grande do Sul	0,667	0,72	0,769
22	Rondônia	0,585	0,654	0,712
23	Roraima	0,643	0,652	0,695
24	Santa Catarina	0,648	0,717	0,773
25	São Paulo	0,729	0,756	0,789
26	Sergipe	0,552	0,596	0,672
27	Tocantins	0,549	0,605	0,69

Fonte: PNUD (2012).

Legenda: classificação do IDHM-Renda

Muito Baixo

Médio

Muito alto

Baixo

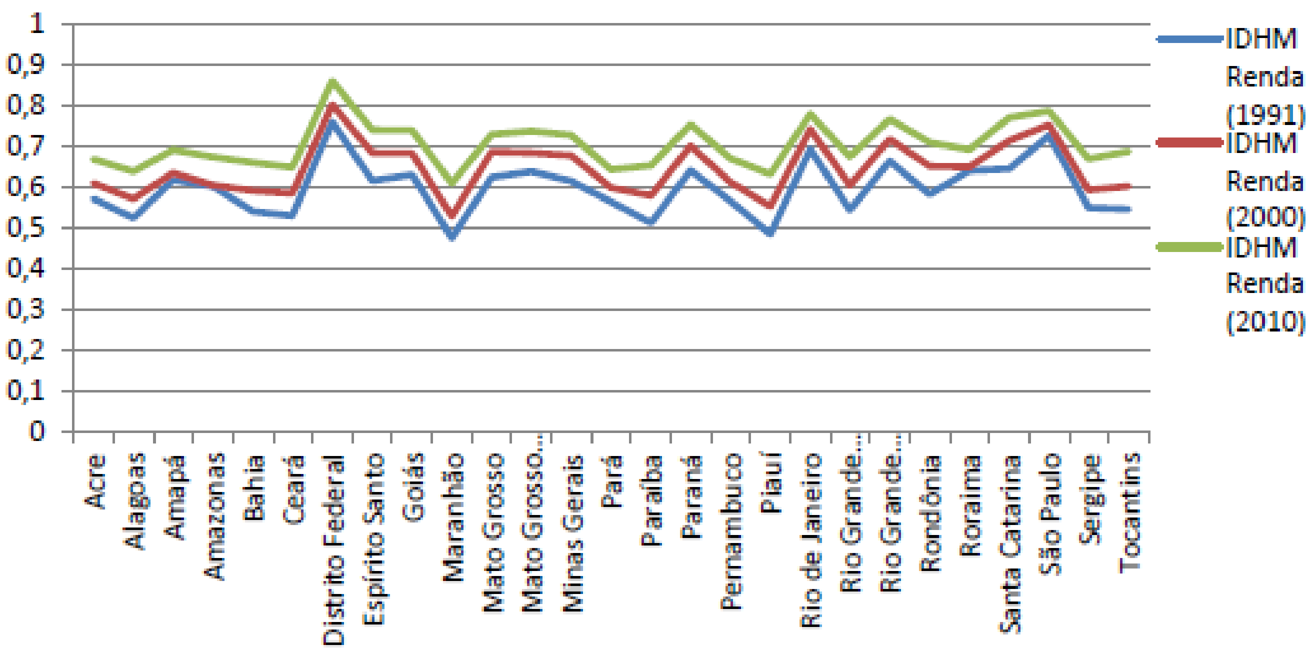
Alto

Na dimensão Renda, representada na tabela 3, vemos a maior concentração dos estados, em 1991, nas classificações Baixo e Médio, que estão representadas nas cores rosa e amarelo, respectivamente.

Em 2010, predominam as classificações médio e alto. Vemos que apenas o Distrito federal alcançou a classificação alto no período.

O gráfico a seguir, representado pela figura 2, mostra o IDHM-Renda das unidades de federação nos três anos, 1991, 2000 e 2010.

Figura 2 – IDHM Renda das unidades da Federação



Fonte: A Autora.

O estado que mais cresceu na dimensão Renda, no período, também foi o Piauí, 14,7%, que estando na classificação Muito baixo, em 1991, com IDHM-Renda aproximadamente 0,488, passou a classificação médio em 2010 com IDHM-Renda aproximadamente 0,635.

Com menor crescimento no período ficou Roraima que estava classificado com médio em 1991 e assim permaneceu em 2010.

Segue a análise do IDHM-Longevidade, representado na tabela 4.

Tabela 4: IDHM – Longevidade dos Estados Brasileiros de 1991, 2000 e 2010.

	Unidade da Federação	**IDHM Longevidade (1991)**	**IDHM Longevidade (2000)**	**IDHM Longevidade (2010)**
1	Acre	0,645	0,694	0,777
2	Alagoas	0,552	0,647	0,755
3	Amapá	0,668	0,711	0,813
4	Amazonas	0,645	0,692	0,805
5	Bahia	0,582	0,68	0,783
6	Ceará	0,613	0,713	0,793
7	Distrito Federal	0,731	0,814	0,873
8	Espírito Santo	0,686	0,777	0,835
9	Goiás	0,668	0,773	0,827
10	Maranhão	0,551	0,649	0,757
11	Mato Grosso	0,654	0,74	0,821
12	Mato Grosso do Sul	0,699	0,752	0,833
13	Minas Gerais	0,689	0,759	0,838
14	Pará	0,64	0,725	0,789
15	Paraíba	0,565	0,672	0,783
16	Paraná	0,679	0,747	0,83
17	Pernambuco	0,617	0,705	0,789
18	Piauí	0,595	0,676	0,777
19	Rio de Janeiro	0,69	0,74	0,835
20	Rio Grande do Norte	0,591	0,7	0,792
21	Rio Grande do Sul	0,729	0,804	0,84
22	Rondônia	0,635	0,688	0,8
23	Roraima	0,628	0,717	0,809
24	Santa Catarina	0,753	0,812	0,86
25	São Paulo	0,73	0,786	0,845
26	Sergipe	0,581	0,678	0,781
27	Tocantins	0,589	0,688	0,793

Fonte: PNUD (2012).

Legenda: classificação do IDHM-Longevidade

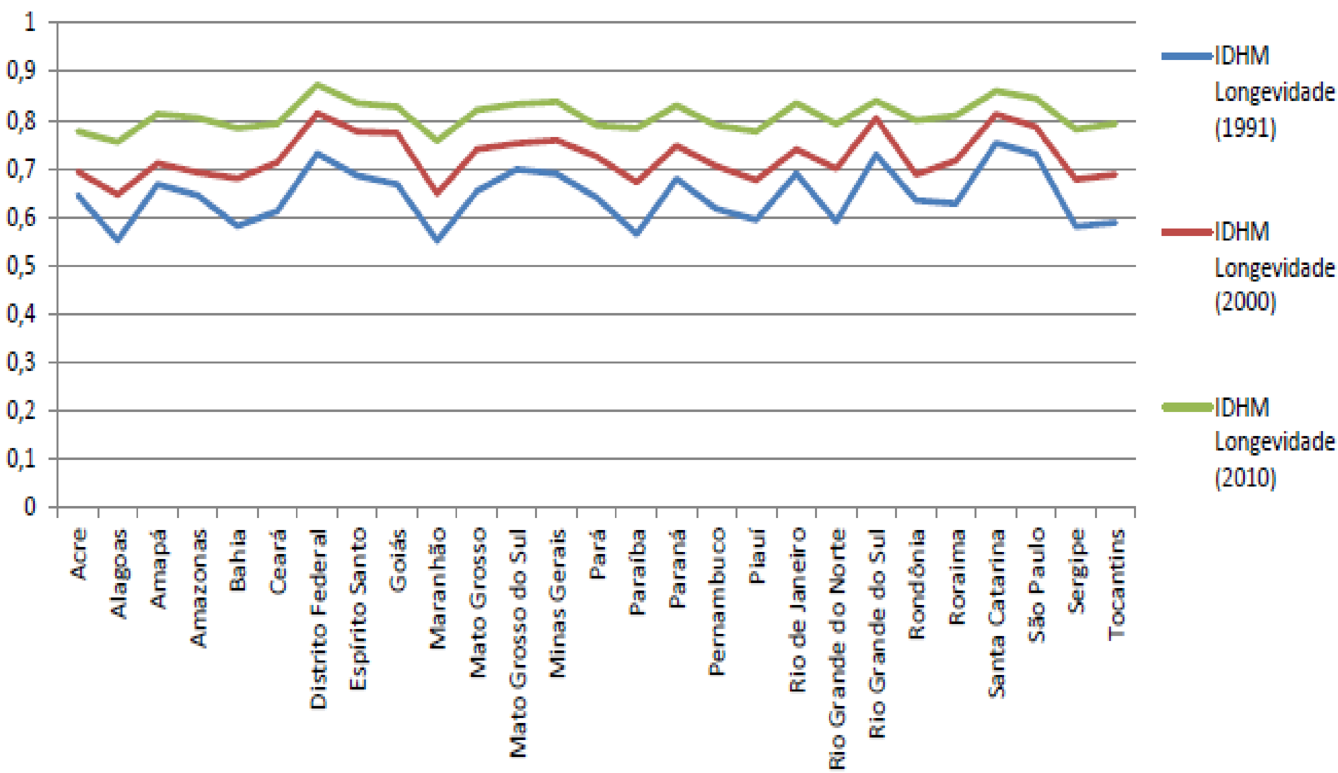
Muito Baixo | Médio | Muito alto

Baixo | Alto

A tabela 4 mostra, que na dimensão Longevidade, já não existiam unidades da federação na classificação muito baixo, em 1991, e que nesse ano a maior concentração estava na classificação médio.

A predominância das unidades da federação em 201,0 era na classificação muito alto, representado na tabela pela cor azul.

Figura 3 – IDHM Longevidade das unidades da Federação



Fonte: A Autora.

O maior percentual de crescimento, na dimensão Renda, em 1991 foi da Paraíba, 21,8%, que estava na classificação baixo em 1991 3 em 2010 já estava classificada como Alto.

O menor percentual de crescimento, nesse período foi de Santa Catarina, que já tinha IDHM-Longevidade alto em 1991, e em 2010 foi verificado como muito alto.

Continuamos com a verificação do IDHM-Educação, na tabela 5.

Tabela 5: IDHM – Educação dos Estados Brasileiros de 1991, 2000 e 2010.

	Unidade da Federação	IDHM Educação (1991)	IDHM Educação (2000)	IDHM Educação (2010)
1	Acre	0,176	0,325	0,559
2	Alagoas	0,174	0,282	0,52
3	Amapá	0,254	0,424	0,629
4	Amazonas	0,204	0,324	0,561
5	Bahia	0,182	0,332	0,555
6	Ceará	0,204	0,377	0,615
7	Distrito Federal	0,419	0,582	0,742
8	Espírito Santo	0,304	0,491	0,653
9	Goiás	0,273	0,439	0,646
10	Maranhão	0,173	0,312	0,562
11	Mato Grosso	0,221	0,426	0,635
12	Mato Grosso do Sul	0,259	0,445	0,629
13	Minas Gerais	0,257	0,47	0,638
14	Pará	0,194	0,319	0,528
15	Paraíba	0,191	0,331	0,555
16	Paraná	0,298	0,522	0,668
17	Pernambuco	0,242	0,372	0,574
18	Piauí	0,164	0,301	0,547
19	Rio de Janeiro	0,392	0,53	0,675
20	Rio Grande do Norte	0,242	0,396	0,597
21	Rio Grande do Sul	0,328	0,505	0,642
22	Rondônia	0,181	0,345	0,577
23	Roraima	0,24	0,457	0,628
24	Santa Catarina	0,329	0,526	0,697
25	São Paulo	0,363	0,581	0,719
26	Sergipe	0,211	0,343	0,56
27	Tocantins	0,155	0,348	0,624

Fonte: PNUD (2012).

Legenda: classificação do IDHM-Educação

Muito Baixo

Médio

Muito alto

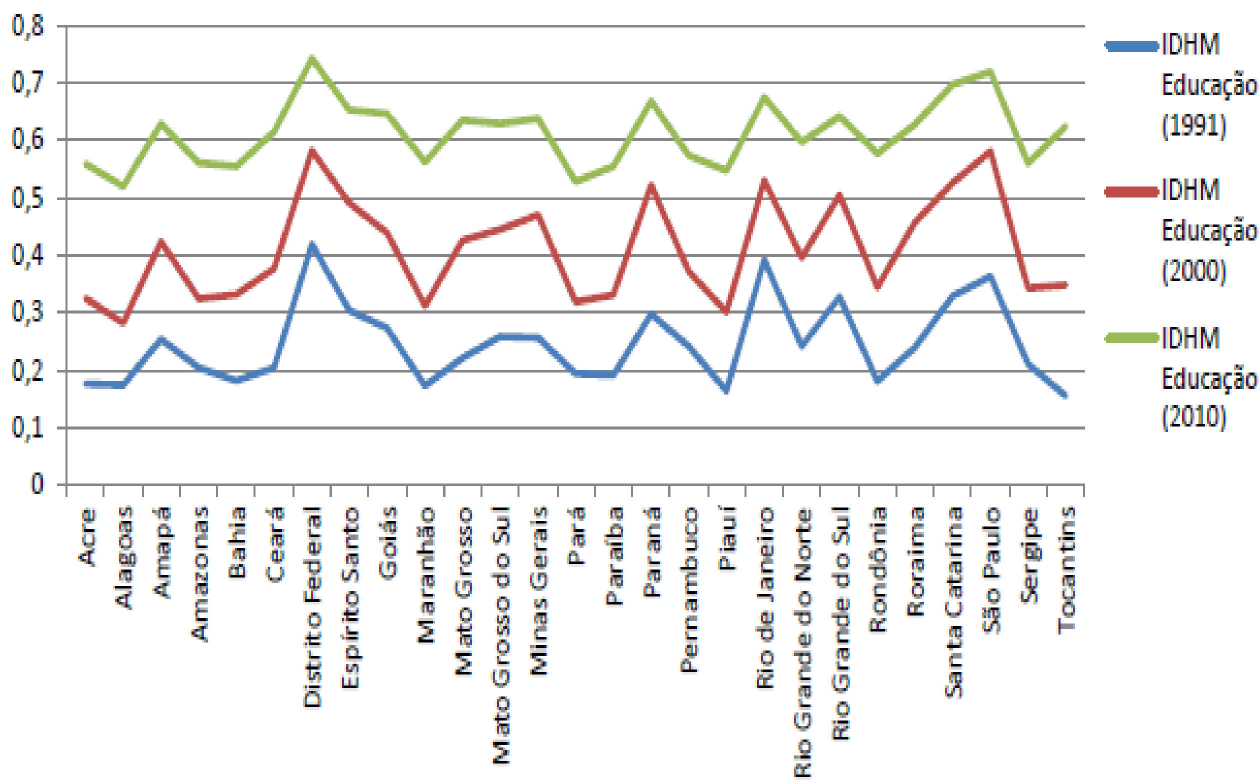
Baixo

Alto

Vemos na tabela 5, que em 1991, todas as unidades da federação estavam classificadas como muito baixo, na dimensão Educação, vemos na tabela a representação da classificação na cor laranja.

A predominância em 2010 se deu nas classificações, baixo e médio, tendo apenas duas unidades da federação na classificação alto e nenhuma na classificação muito alto.

Figura 3 – IDHM Educação das unidades da Federação



Fonte: A Autora.

Na dimensão educação, o estado com maior percentual de crescimento foi Tocantins, com 46,9%, evoluindo, de muito baixo em 1991, para médio em 2010. E o menor percentual ficou com o Rio de Janeiro, que também evoluiu de muito baixo para médio, mas com crescimento de apenas 28,3%.

2.1.2. Análise do IDHM

Analisando os dados das tabelas 2, 3, 4 e 5 observamos que os estados que possuem maior IDHM não foram os que mais cresceram no período de 1991 a 2010.

Nas tabelas abaixo, são apresentados as siglas dos estados que tiveram maior e menor crescimento percentual neste período, e os que possuem o maior e o menor IDHM em todas as categorias, ou seja, que são os primeiros e últimos colocados no ranking.

Tabela 6: Percentual dos estados com maior e menor crescimento no IDHM e dimensões entre 1991 e 2010.

Crescimento	**IDHM**	**IDHM - Renda**	**IDHM - Longevidade**	**IDHM - Educação**
Maior	PI 28,4%	PI 14,7%	PB 21,8%	TO 46,9%
Menor	RJ 18,8%	RR 5,2%	SC 10,7%	RJ 28,3%

Nesse caso ter o maior crescimento no período de 1991 a 2010, não quer dizer ter o índice mais elevado. Piauí, por exemplo, que teve o maior crescimento no IDHM no período, apresenta índices muito inferiores ao Rio de Janeiro que foi o estado que apresentou menor percentagem de crescimento.

A tabela 7 mostra as unidades da federação com maior e menor IDH e dimensões.

Tabela 7: Ranking dos primeiros e últimos colocados no IDHM e Dimensões

ANO	**IDHM**		**IDHM - Renda**		**IDHM - Longevidade**		**IDHM - Educação**	
	Primeiro	Último	Primeiro	Último	Primeiro	Último	Primeiro	Último
1991	DF 0,616	MA 0,357	DF 0,762	MA 0,478	SC 0,753	MA 0,551	DF 0,419	TO 0,155
2000	DF 0,725	AL 0,471	DF 0,805	MA 0,531	DF 0,814	AL 0,647	DF 0,582	AL 0,282
2010	DF 0,824	AL 0,631	DF 0,863	MA 0,612	DF 0,873	AL 0,755	DF 0,742	AL 0,52

As cores das unidades da federação representadas na tabela 7, seguem a mesma orientação das legendas das tabelas de 2 a 5 e representam as classificações do IDHM e dimensões.

3. MODELAGEM MATEMÁTICA

Para a realização da modelagem matemática deste trabalho, seguimos as teorias de Biembengut e Hein (2011) e Bassanezi (2002). Biembengut e Hein (2011) definem três etapas da modelagem matemática: Interação, Matematização e Validação do Modelo. De acordo com os teóricos citados, no processo da modelagem matemática deve existir obtenção de um modelo.

Para o presente trabalho, as etapas da modelagem matemática consistiram em:

Interação: Nesta etapa ocorre a familiarização com o problema que foi escolhido para ser modelado, é a etapa em que é feita a pesquisa, ou levantamento de dados, sobre o assunto. Realizamos um estudo sobre o tema IDH pela importância do tema na valorização do ser humano, restringimos o estudo para os estados brasileiros utilizando o IDHM, a partir daí selecionamos um problema gerador: prever o IDHM dos estados brasileiros para anos futuros.

Matematização: é quando ocorre a “tradução” da situação-problema para a linguagem matemática. O objetivo principal desta etapa é chegar a um conjunto de expressões aritméticas, fórmulas, equações algébricas, diagramas, gráficos, representações geométricas, etc., que levem à solução do problema (BIEMBENGUT; HEIN, 2007).

Estudando sobre o tema, escolhemos teorias matemáticas que nos dariam base para a realização do trabalho. No decorrer deste estudo, fizemos experimentações, e após selecionamos os conceitos matemáticos que melhor se aplicavam ao nosso problema gerador.

Validação do Modelo: É a etapa em que ocorre a interpretação da solução encontrada, e a verificação sua validade. Realizamos testes para a validação destes modelos, comparando com a estimativa fornecida pelo PNUD, para que fosse possível a obtenção dos que melhor se aplicavam a nossa pesquisa.

A verificação da validade dos modelos construídos é uma etapa muito importante na modelagem matemática.

Segundo Bassanezi (2002, p.16) “A *modelagem matemática* consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Complementa ainda que:

> A modelagem matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representação de um sistema ou parte dele. Bassanezi (2002, p.24)

Do nosso tema gerador extraímos ainda alguns questionamentos que nos auxiliariam na validação dos modelos testados: “O que acontecerá com o IDHM dos estados daqui a alguns anos?” “Teremos igualdade social entre os estados no futuro? Em quanto tempo?”. Partindo do pressuposto que a modelagem faz a interação entre a matemática e a realidade (Biembengut, 2011), esperamos encontrar um modelo que melhor se aplique a realidade do IDHM e suas dimensões: Renda, Longevidade e Educação, levando em consideração que estamos trabalhando com apenas três anos, que são os dados disponibilizados até o presente momento.

4. MODELAGEM NUMÉRICA

Na modelagem numérica escolhemos trabalhar com ajuste de curvas pelo critério dos mínimos quadrados (CMQ).

Calculamos a média aritmética do IDHM e suas dimensões para os anos de 1991, 2000 e 2010.

Com a utilização dos softwares Excel e Maple, escolhemos as funções que melhor se adaptavam aos dados obtidos, isto é, que possuíam um comportamento de acordo com os dados observados inicialmente nas tabelas e que apresentavam um resíduo pequeno. As curvas escolhidas foram, a polinomial de grau dois, que nomeamos de modelo Quadrático, e a curva logística $L(t) = \frac{1}{1+ae^{bt}}$ que nomeamos modelo Logístico.

Dados uma tabela com n+1 pontos (x_i, y_i), $i = 0,1,\ldots,n$, consideramos a função de ajustamento.

$$Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_p x^p \text{, p<n.} \tag{1}$$

Define-se resíduo (δ_i) a diferença entre o valor de Y_i da função de ajustamento e o valor medido de y_i, ou seja: Y_i - y_i = δ_i

O critério dos mínimos quadrados estabelece que a soma do quadrado dos resíduos deve ser a menor possível:

$$\sum_{i=0}^{n} \delta_i^2 \tag{2}$$

Seja $F(a_0, a_1, \ldots a_p) = \sum_{i=0}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (Y_i - y_i)^2$. (3)

Para F ter valor mínimo, é preciso que: $\frac{\partial F}{\partial a_0} = 0$; $\frac{\partial F}{\partial a_1} = 0$; . . . ; $\frac{\partial F}{\partial a_p} = 0$.

4.1. Ajuste de funções:

Veremos a seguir alguns tipos de ajustes que utilizaremos nas próximas seções.

4.1.1. Ajuste por função Linear:

Seja a função de ajuste

$$Y(x) = a_0 + a_1 x\,. \tag{4}$$

A soma do quadrado dos resíduos é

$$F(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{n} (Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2 \tag{5}$$

Sendo F uma função de duas variáveis, a_0 e a_1 o menor valor de F será obtido através de $\frac{\delta F}{\delta a_0} = 0$ e $\frac{\delta F}{\delta a_1} = 0$.

Assim:

$$\frac{\delta F}{\delta a_0} = 0\,, \sum_{i=0}^{n} 2(a_0 + a_1 x_i - y_i) = 0 \tag{6}$$

e

$$\frac{\delta F}{\delta a_1} = 0\,, \sum_{i=0}^{n} 2(a_0 + a_1 x_i - y_i)x_i = 0\,; \tag{7}$$

Obtém-se o sistema linear de duas equações e duas variáveis:

$$\begin{cases} 2\sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i - y_i) = 0 \\ 2\sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_1 - y_i)x_i = 0 \end{cases} \tag{8}$$

ou

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} y_i = \sum_{i=0}^{n} a_0 + \sum_{i=0}^{n} a_1 x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i = \sum_{i=0}^{n} a_0 x_i + \sum_{i=0}^{n} a_1 x_i^2 \end{cases} \tag{9}$$

Obtém-se:

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{cases} \qquad (10)$$

Resolvendo-se este último sistema linear, são obtidos os valores de a_0 e a_1, e assim determina-se a função de ajuste citada $Y = a_0 + a_1 x$ em (4).

4.1.2. Ajuste por função Logística

Seja

$$Y = \frac{1}{1 + ae^{bx}} \qquad (11)$$

a função de ajuste.

Para determinar os parâmetros a e b do modelo Logístico (11), realizamos o processo de linearização:

$$\ln(\frac{1}{Y} - 1) = \ln a + bx.$$

Comparando com a eq. (4), resulta que, resolvendo o sistema de duas equações lineares, determinamos os valores de a e b:

$$\begin{cases} (n+1)\ln a + b\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} \ln((\frac{1}{y_i}) - 1) \\ \ln a \sum_{i=0}^{n} x_i + b\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i \ln((\frac{1}{y_i}) - 1) \end{cases} \qquad (12)$$

4.1.3. Ajuste por função Quadrática:

Seja $Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ a função de ajuste. Pelo critério dos Mínimos Quadrados:

$$F(a_{0,}a_{1,}a_2) = \sum_{i=0}^{n} (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2 \quad (13)$$

Assume valor mínimo se:

$$\frac{\delta F}{\delta a_0} = \frac{\delta F}{\delta a_1} = \frac{\delta F}{\delta a_2} = 0 \quad (14)$$

Assim os parâmetros a_0, a_1, a_2 são obtidos resolvendo:

$$\begin{cases} \sum \mathrm{yi} = (\mathrm{n}+1)a_0 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 \\ \sum x_i y_i = a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 y_i = a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 \end{cases} \quad (15)$$

4.2. Modelagem pelo critério dos mínimos quadrados para IDHM médio

Através dos dados, constantes na tabela 2, calculamos a média aritmética do índice de desenvolvimento humano dos estados brasileiros de 1991, 2000 e 2010. Apresentamos os resultados obtidos na tabela 8.

Tabela 8: IDHM médio dos estados Brasileiros

Ano	t	IDHM médio dos Estados brasileiros
1991	0	0, 453
2000	9	0, 576
2010	19	0, 704

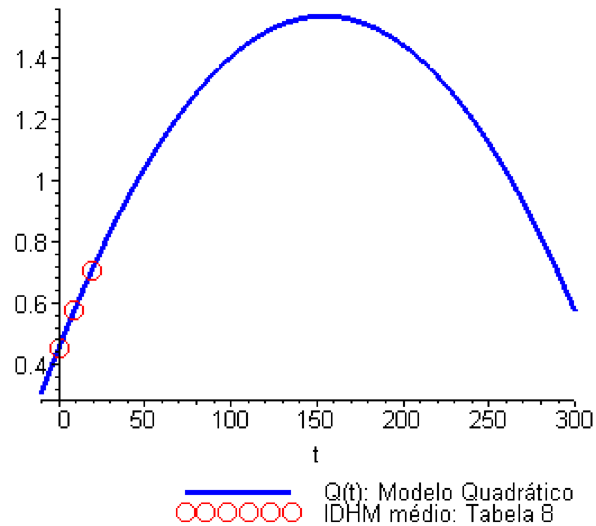
4.2.1. Ajuste por função Quadrática Q(t)

Aplicando o critério dos mínimos quadrados aos dados da tabela 8, com a utilização dos softwares Excel e Maple, para um polinômio de grau 2, obtivemos

$$Q(t) = -0{,}0000456140\ 3509\,t^2 + 0{,}0140771929\ 8t + 0{,}4530000000 \quad , \tag{16}$$

Representada graficamente na figura 4.

Figura 4- Modelo Quadrático utilizando o software Maple



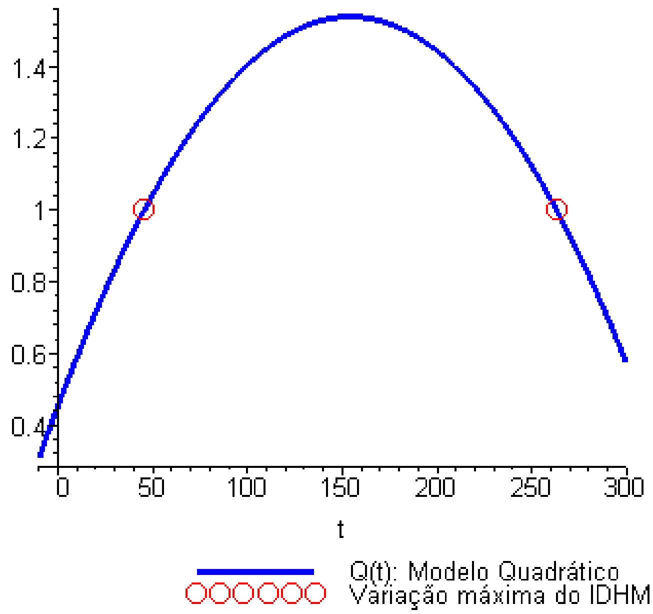
Fonte: A Autora.

Esse modelo projetou o IDH Brasileiro de 2012 em 0,7285052631, o que é muito próximo à estimativa do PNUD disponibilizada no Ranking IDH Global, que se encontra no site: http://www.pnud.org.br/atlas/ranking/Ranking-IDH-Global-2012.aspx, em que o Brasil foi classificado em 85º no ranking mundial com IDH 0,730. Nessa comparação, o erro obtido foi 0,002047584795.

O modelo testado mostrou-se válido somente para projeções até o tempo t = 45.59274014 que equivale ao ano de 2036, aproximadamente, onde o IDHM médio atingiu o valor 1. Após esta data a o valor do IDHM passa a ser maior que 1 (figura 5), o que é inconsistente com os dados, visto que a faixa de variação do IDHM vai de zero a um.

Assim, até 2036, consideramos que o modelo é válido, pois o resíduo obtido é zero.

Figura 5 – Verificação da validade do modelo Quadrático



Fonte: A Autora.

4.2.2. Ajuste por função Logística L(t)

Para determinar os parâmetros da função logística (11), com a notação

$$L(t) = \frac{1}{1 + ae^{bt}},$$

construímos o sistema linear análogo ao sistema linear (12), a partir dos dados da tabela 8.

Tabela 9: Cálculo para modelo Logístico IDHM-médio

I	ti	L(ti)	ti²	ln((1/ L(ti))-1)	ti.ln((1/ L(ti))-1)
0	0	0,453	0	0,188556677	0
1	9	0,576	81	-0,306374205	-2,757367849
2	19	0,704	361	-0,866418902	-16,46195913
∑	28	1,733	442	-0,98423643	-19,21932698

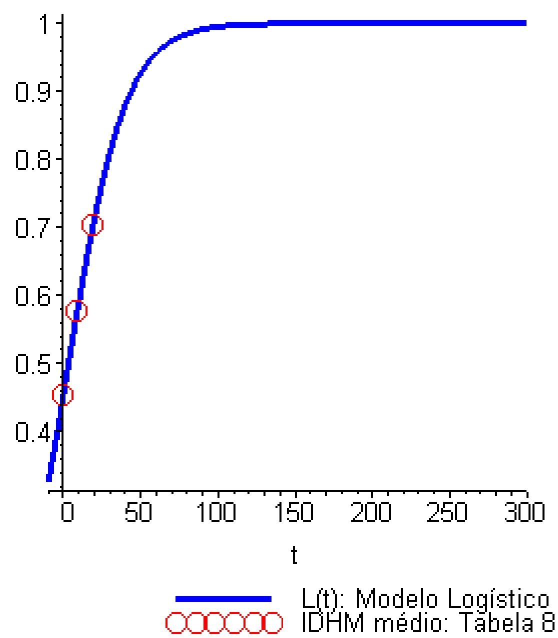
$$\begin{cases} 3\ln a + 28b = -0{,}98423643 \\ 28\ln a + 442b = -19{,}021932698 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1{,}197265106 \\ b = -0{,}05444128792 \end{cases}$$

logo $$L(t)=\frac{1}{1+1{,}19726510\ \ 6e^{-0{,}05444128792.t}} \qquad (17)$$

O modelo Logístico (17) projetou o IDH brasileiro de 2012 em 0,7237674724, mostrando-se mais distante da estimativa do PNUD do que o Quadrático, sendo seu erro 0,008537709041.

A análise gráfica da figura 6 mostra que, a medida que o tempo cresce, o modelo tende a um, isso representa melhor o comportamento do IDHM dos estados, e o modelo Logístico (17) mostrou-se adequado para previsões futuras.

Figura 6 - Modelo Logístico utilizando o software Maple.



Fonte: A Autora.

4.2.3. Comparação dos resultados Q(t) e L(t)

Nessa seção faremos a comparação dos modelos Quadrático e Logístico do IDHM médio, como vemos na tabela 10.

Tabela 10: Comparação dos modelos Quadrático e Logístico para o IDHM-médio

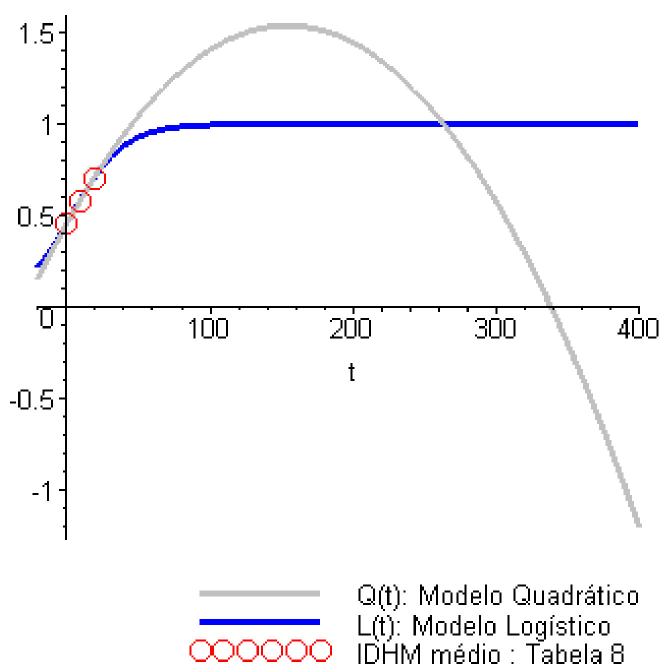
Ano	**t**	**IDHM médio dos Estados brasileiros**	**Resíduo ao quadrado**	
			Parábola	**Logístico**
1991	0	0,453	0	0,4457243977x10-^{5}
2000	9	0,576	0	0,7544541471x10^{-6}
2010	19	0,704	0	0,6361870671x10^{-5}
		∑	0	0,1157356880x10^{-4}

O método dos mínimos quadrados procura encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados, tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados observados. Essas diferenças são chamadas de resíduo

Comparando os dois tipos ajuste, concluímos, a partir da tabela 10 que o ajuste por parábola seria o melhor modelo até atingir o valor 1, pois apresentou resíduo ao quadrado nulo.

Para previsões futuras o modelo Logístico se mostrou mais apropriado de acordo com a análise gráfica, pois tende a 1, enquanto o modelo Quadrático decresce tornando-se negativo.

Figura 7 – Comparação dos Modelos Quadrático e Logístico utilizando o software Maple.



Fonte: A Autora.

4.3. IDHM – Renda Médio

Na tabela 11 constam as médias aritméticas do IDHM – Renda obtidas através da tabela 3.

Tabela 11: IDHM Renda médio

Ano	t	IDH-R médio dos estados brasileiros
1991	0	0,599185185
2000	9	0,647777778
2010	19	0,706888889

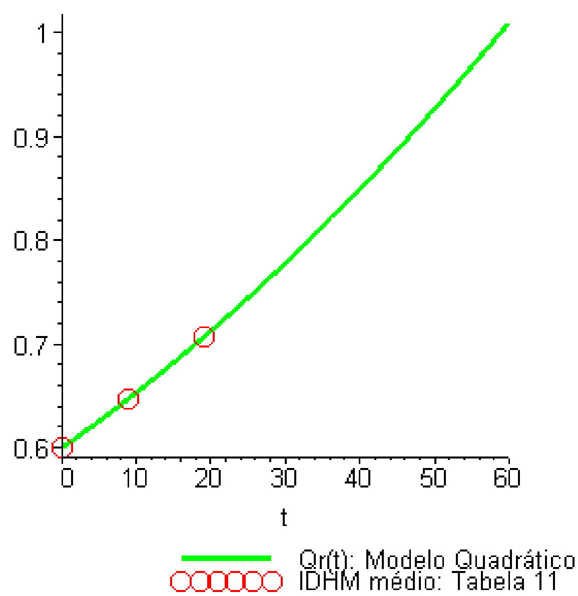
4.3.1. Modelo Quadrático $Q_r(t)$

O modelo Quadrático que melhor ajusta os dados da tabela 11 é

$$Q_r(t) = 0{,}2982456140 \times 10^{-4} t^2 + 0{,}005064912281 t + 0{,}5990000000 \qquad (18)$$

A parábola ultrapassou o valor 1 após um tempo t = 58,80776042 que representa aproximadamente o ano de 2049, tornando o modelo inválido para previsões após esta data, conforme conta na figura 8.

Figura 8 – Modelos Quadrático Renda



Fonte: A Autora.

4.3.2. Modelo Logístico $L_r(t)$

Os dados da tabela 11 foram utilizados para compor o modelo Logístico, conforme desenvolvimento a seguir.

Tabela 12: Cálculo para Modelo Logístico – IDHM - Renda médio

i	ti	L_r(ti)	ti²	ln((1/ L_r(ti))-1)	ti.ln((1/ L_r(ti))-1)
0	0	0,599185185	0	-0,402071195	0
1	9	0,647777778	81	-0,609285413	-5,483568721
2	19	0,706888889	361	-0,88032174	-16,72611305
∑	28	1,953851852	442	-1,891678348	-22,20968177

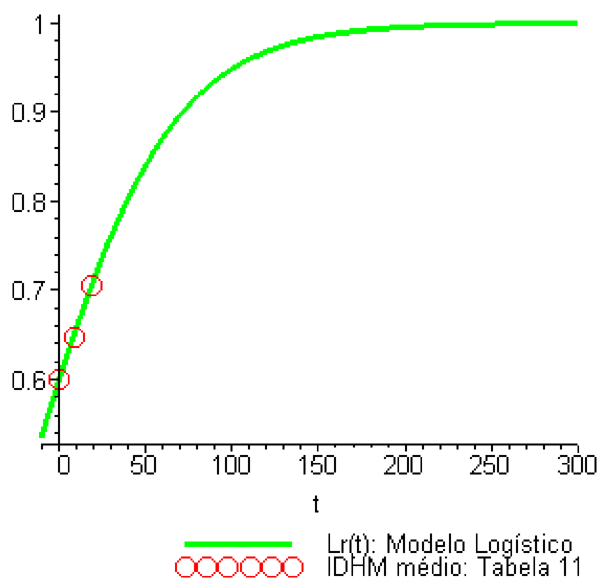
$$\begin{cases} 3\ln a + 28b = -1{,}891678348 \\ 28\ln a + 442b = -22{,}20968177 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0{,}673480277 \\ b = -0{,}025206737 \end{cases}$$

Assim,

$$L_r(t) = \frac{1}{1 + 0{,}673480277\, e^{-0{,}025206737.t}} \tag{19}$$

O modelo (19) mostrou-se válido conforme ilustrado na figura (9).

Figura 9 – Modelos Logístico Renda



Fonte: A Autora

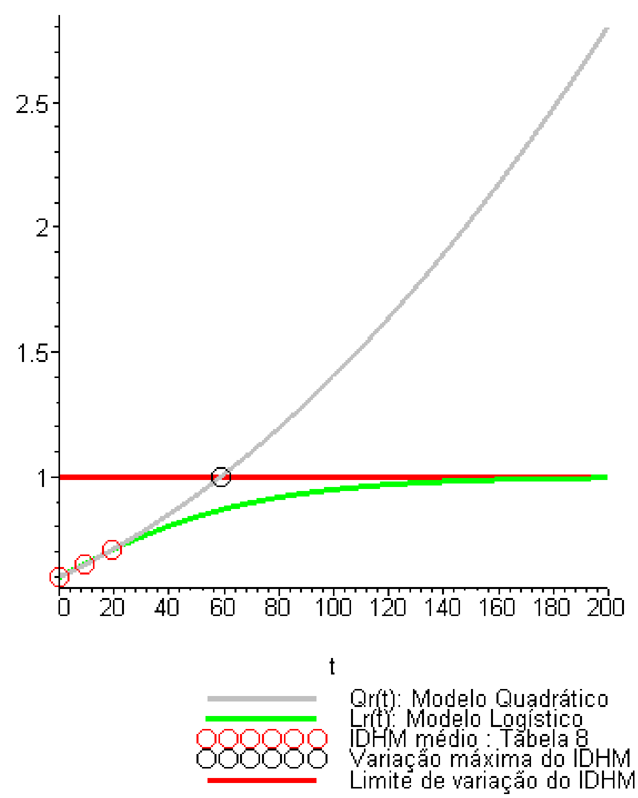
4.3.3. Comparação entre os modelos $Q_r(t)$ e $L_r(t)$

Na figura 10, comparamos graficamente os modelos (18) e (19).

O modelo Quadrático mostrou-se inválido para anos posteriores a 2049, pois a parábola ultrapassa o valor 1, que seria o IDHM-Renda máximo que os estados poderiam alcançar. O modelo Logístico se mostrou mais viável pela sua estabilidade muito próxima a 1. Até 2049, os dois modelos se mostram efetivos, pois, como vemos no gráfico 10, os dois modelos se ajustam perfeitamente aos pontos do IDHM-Renda médio da tabela 11.

No gráfico 10 é possível ver o ponto onde o modelo Quadrático ultrapassa a linha limite enquanto o modelo Logístico tende ao valor máximo sem, no entanto, ultrapassá-lo.

Figura 10 – Comparação dos Modelos Quadrático e Logístico para a dimensão Renda



Fonte: A Autora.

4.4. IDHM – Longevidade Médio

Os dados da tabela 13 são as médias aritméticas do IDHM – Longevidade, calculado a partir dos dados da tabela 4.

Tabela 13: IDHM - Longevidade médio

Ano	**t**	**IDHM-L médio dos estados brasileiros**
1991	0	0,64462963
2000	9	0,723666667
2010	19	0,80862963

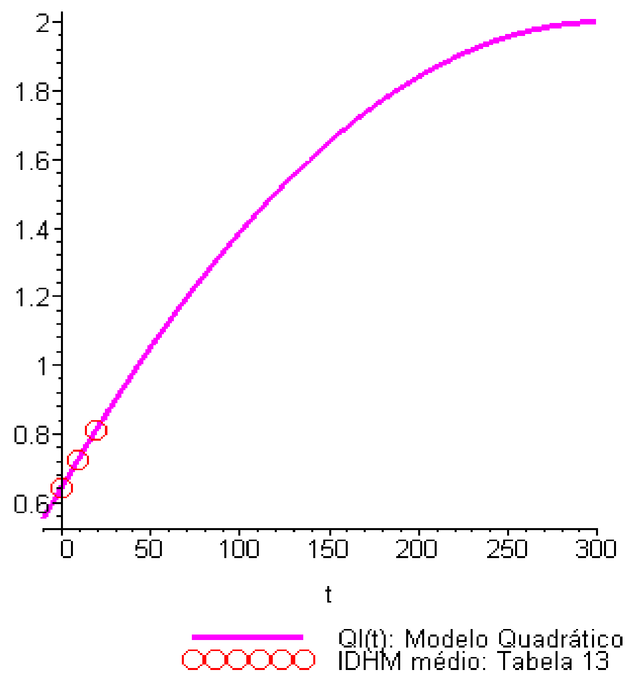
4.4.1. Modelo Quadrático $Q_l(t)$

Utilizando recurso semelhante ao anterior, ajustamos os dados da tabela 13 encontrando:

$$Q_l(t) = -0{,}1461988304 \times 10^{-4} t^2 + 0{,}008909356725t + 0{,}6440000000 \qquad (20)$$

A parábola, representada na figura 11, ultrapassou o valor 1 após o tempo t = 42,99082936 que representa aproximadamente o ano de 2033, tornando o modelo inválido para previsões após esta data.

Figura 11 – Modelos Quadrático Longevidade



Fonte: A Autora.

4.4.2. Modelo Logístico $L_l(t)$

Para o ajuste Logístico do IDHM – Longevidade, utilizamos os dados constantes na tabela 9.

Tabela 14: Cálculo para Modelo Logístico – IDHM - Longevidade médio

i	ti	L_l(ti)	ti²	ln((1/L_l(ti))-1)	ti.ln((1/ L_l(ti))-1)
0	0	0,64462963	0	-0,595515393	0
1	9	0,723666667	81	-0,962723016	-8,664507148
2	19	0,80862963	361	-1,44113034	-27,38147646
∑	28	2,176925927	442	-2,99936875	-36,0459836

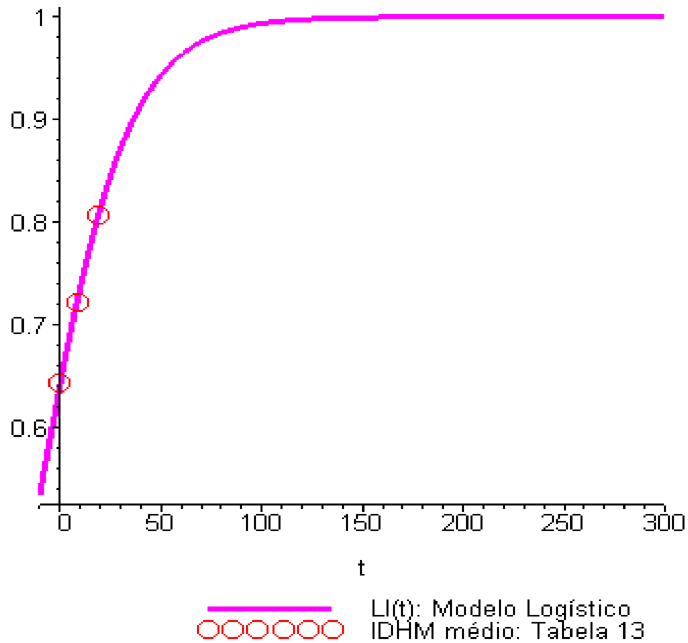
$$\begin{cases} 3\ln a + 28b = -2{,}99936875 \\ 28\ln a + 442b = -36{,}0459836 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0{,}557760541 \\ b = -0{,}044567575 \end{cases}$$

Assim:

$$L_l(t) = \frac{1}{1 + 0{,}557760541\,e^{-0{,}044567575.t}} \tag{21}$$

Constatamos que a curva se aproxima do modelo geral em que o valor se estabiliza próximo ao limite 1, conforme figura 12.

Figura 12 – Modelos Logístico Longevidade

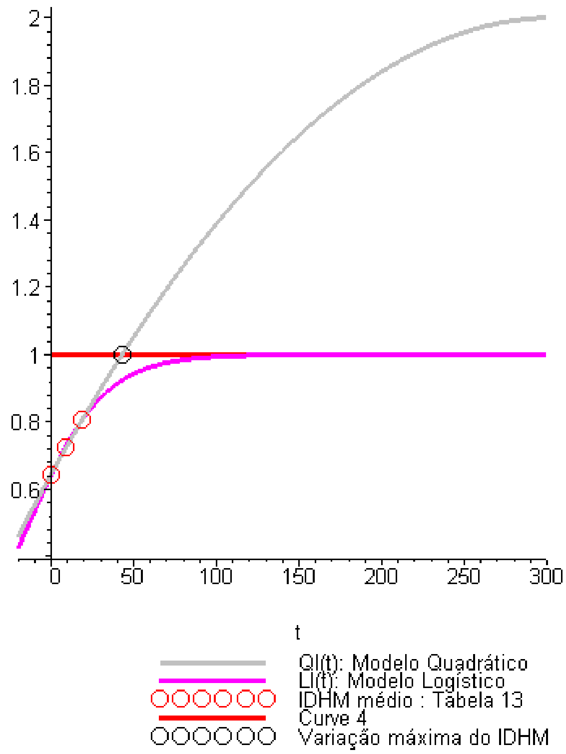


Fonte: A Autora.

4.4.3. Comparação entre os modelos $Q_l(t)$ e $L_l(t)$

Comparando as curvas dos modelos Quadrático e Logístico para o indicador Longevidade, percebemos que, a curto prazo, os dois modelos se aplicam para a previsão do IDHM-Longevidade. A partir do tempo t = 42,99082936 que representa aproximadamente o ano de 2033, o modelo Quadrático passa a ser inválido, pois ultrapassa o IDHM 1, enquanto o Logístico permanece válido tendendo a 1, como vemos no gráfico 13.

Figura 13 – Comparação dos Modelos Quadrático e Logístico para a dimensão Longevidade



Fonte: A Autora.

4.5. IDHM – Educação Médio

Os dados da tabela 10 são o resultado da média aritmética do IDHM – Educação, dados estes, que estão contidos na tabela 4.

Figura 15: IDHM - Educação médio

Ano	**t**	**IDH-E médio dos estados brasileiros**
1991	0	0,245555556
2000	9	0,411296296
2010	19	0,612407407

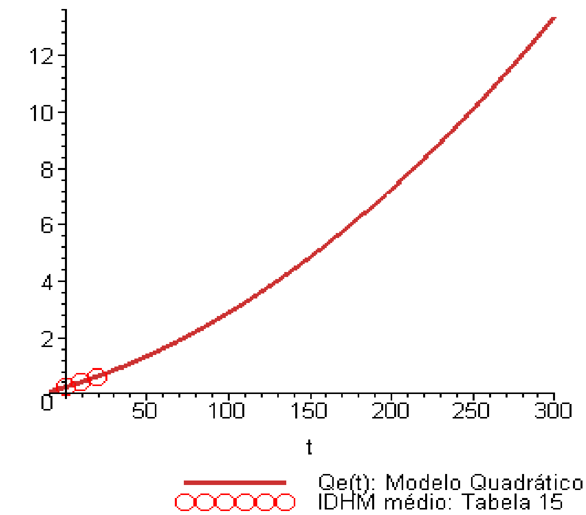
4.5.1. Modelo Quadrático $Q_e(t)$

O ajuste dos dados da tabela 15, por meio do software Maple, resultou em:

$$Q_e(t) = 0{,}8713450292 \times 10^{-4} t^2 + 0{,}0176602339\ 2 + 0{,}2450000000 \quad , \qquad (22)$$

que tem como representação gráfica, uma parábola com concavidade para cima, como mostra a figura 14, sua curva ultrapassou rapidamente o valor máximo para o desenvolvimento dos estados que seria 1. Esse modelo só será válido para estimar o IDHM-Educação até o tempo t = 36,26319248, que seria o ano de 2027, aproximadamente. O Modelo estima IDH educação brasileiro para 2020 de 0,830.

Figura 14 – Modelos Quadrático Educação



Fonte: A Autora.

4.5.2. Modelo Logístico $L_e(t)$

Como nos demais indicadores, para a realização do ajuste Logístico do IDHM – Educação utilizamos os dados, desta vez constantes na tabela 10. Como nos demais indicadores, o modelo Logístico mostrou-se eficiente, aproximando-se do modelo geral em que o valor se estabiliza próximo ao limite 1, como mostra a figura 15.

Tabela 16: Cálculo para Modelo Logístico – IDHM - Educação médio

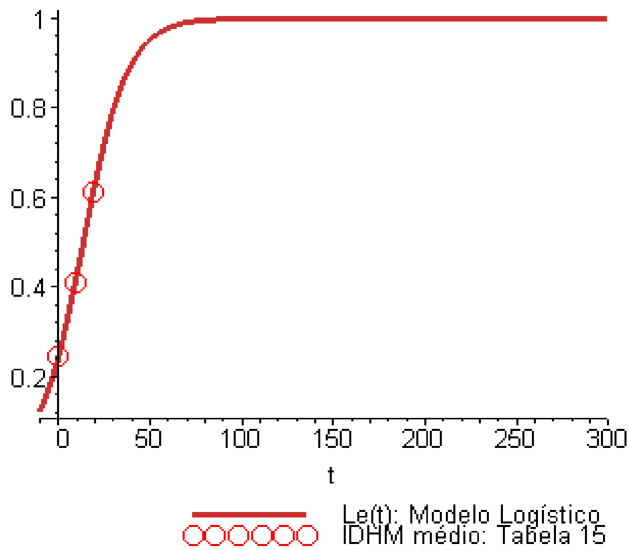
i	ti	$L_e(ti)$	ti²	ln((1/ L_e(ti))-1)	ti.ln((1/ L_e(ti))-1)
0	0	0,245555556	0	1,122458424	0
1	9	0,411296296	81	0,358609138	3,227482244
2	19	0,612407407	361	-0,457442989	-8,691416788
∑	28	1,269259259	442	1,023624573	-5,463934543

$$\begin{cases} 3\ln a + 28b = 1{,}023624573 \\ 28\ln a + 442b = -5{,}463934543 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 3{,}055776189 \\ b = -0{,}083124154 \end{cases}$$

Obtemos:

$$L_e(t) = \frac{1}{1 + 3{,}055776189\, e^{-0{,}083124154.t}} \tag{23}$$

Figura 15 – Modelos Logístico Educação

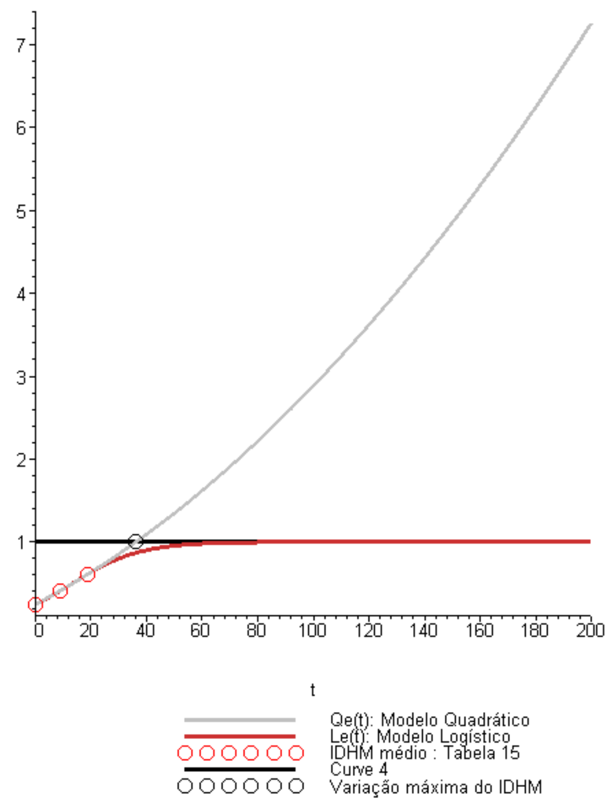


Fonte: A Autora.

4.5.3. Comparação dos modelos Q_e(t) e L_e(t)

Analisando os gráficos Logístico e Quadrático para o indicador Educação, concluímos que, os dois modelos passam pelos pontos médios dos anos 1991, 2000 e 2010, porém a curva quadrática rapidamente ultrapassa o indicador máximo 1 tornando-se ineficiente mesmo para previsão futura a curto prazo, enquanto o modelo Logístico se mantém limitado entre zero e um tornando-se utilizável para tais previsões futuras.

Figura 16 – Comparação dos Modelos Quadrático e Logístico para a dimensão Educação



Fonte: A Autora.

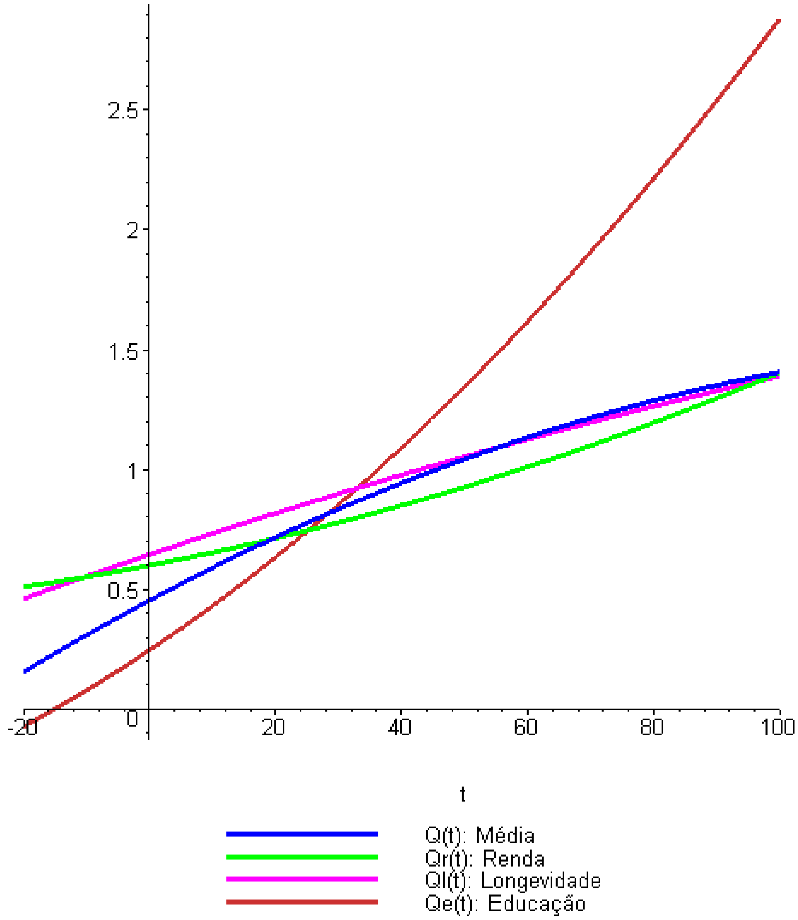
4.6. Comparação Gráfica dos Modelos Quadráticos

Neste tópico iremos fazer uma comparação do modelo Quadrático de todas as dimensões já descritas nos tópicos acima.

Podemos observar que a curva Médial e Longevidade possuem comportamento semelhantes, crescem até um tempo t muito próximo e após decrescem, não ultrapassando o IDHM 1. A curva Renda cresce mais devagar, mas também é válida a um tempo próximo às anteriores. A curva Renda se difere das Média e Longevidade na curvatura, enquanto as anteriores decrescem, ela continua crescendo e só após muito tempo começa decrescer, ultrapassando o limite do IDHM 1.

A curva Educação é a mais distante das quatro, cresce rapidamente ultrapassando muito o limite do IDHM e por isso, em curto prazo deixa de ser vantajosa para a previsão futura.

Figura 17– Comparação dos Modelos Quadráticos para o IDHM médio e dimensões.

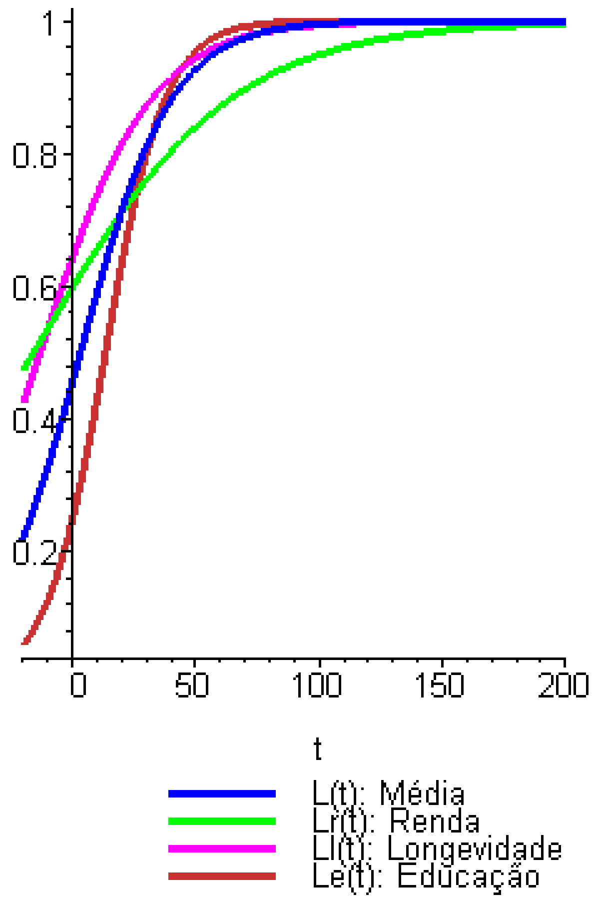


Fonte: A Autora.

4.7. Comparação Gráfica dos Modelos Logísticos

Comparando os modelos Logísticos, podemos observar a semelhança de crescimento dos quatro indicadores. Todas as curvas se limitam entre zero e um. As curvas Média, Longevidade e Educação se encontram em um tempo t, enquanto a curva que representa Renda se mantém mais distante das demais. As curvas Média e Educação apresentam um crescimento mais rápido quando comparadas às curvas Renda e Longevidade.

Figura 18 – Comparação dos Modelos Logísticos para o IDHM médio e dimensões.



Fonte: A Autora.

5. MODELAGEM ANALÍTICA: EQUAÇÃO DIFERENCIAL LOGÍSTICA

Como na modelagem numérica o modelo Logístico se mostrou um bom modelo para previsões do IDHM, optamos por fazer sua análise analítica, a fim de encontrar a solução exata do modelo e comparar com a modelagem numérica realizada.

Utilizaremos o modelo Logístico populacional, referenciado por Meyer (1984, p.350) pela semelhança de comportamento desse modelo com o IDHM. Esse comportamento tem crescimento exponencial e sabemos que o IDHM irá crescer tendendo a um limite máximo. Esse limite máximo é denominado capacidade suporte, que no nosso caso é 1, pois é o IDH máximo.

Consideramos o modelo Logístico, usado para simular o IDHM das Unidades da Federação, expresso pela equação diferencial:

$$\frac{dI(t)}{dt} = b\,I(t)\left(1 - \frac{I(t)}{K}\right), \tag{24}$$

onde I(t) é o IDHM no tempo t e, K é a capacidade de suporte. Como K, no caso do IDHM, é 1, logo:

$$\frac{dI(t)}{dt} = b\,I(t)\,(1 - I(t)). \tag{25}$$

Então, para encontrarmos a solução analítica, reescrevemos o Modelo Logístico na forma:

$$\frac{dI}{dt} = bI(1 - I)\ . \tag{26}$$

Utilizando o método de separação por variáveis temos:

$$\frac{dI}{I(1 - I)} = bdt\ . \tag{27}$$

Integramos ambos os lados da eq. (27)

$$\int \frac{dI}{I(1-I)} = \int b dt . \tag{28}$$

Para obter o valor da integral, o termo

$$\frac{1}{I(1-I)} \tag{29}$$

é decomposto em frações parciais:

$$\frac{1}{I(1-I)} = \frac{1}{I} + \frac{1}{1-I} . \tag{30}$$

Substituindo na equação (28) obtemos:

$$\int (\frac{1}{I} + \frac{1}{1-I}) dI = \int b dt . \tag{31}$$

Na sequência detalhamos os passos para chegar à solução geral.

$$\ln|I| - \ln|1-I| = bt + C \tag{32}$$

$$\ln\left|\frac{1-I}{I}\right| = -bt - C \tag{33}$$

$$e^{\ln\left|\frac{1-I}{I}\right|} = e^{-bt-C} \tag{34}$$

$$\left|\frac{1-I}{I}\right| = e^{-bt-C} = e^{-C} e^{-bt} \tag{35}$$

$$\left|\frac{1-I}{I}\right| = e^{-C}e^{-bt}\,. \qquad (36)$$

Assim:

$$\frac{1-I}{I} = ae^{-bt}\,. \qquad (37)$$

Onde,

$$a = \pm e^{-C}\,. \qquad (38)$$

Resolvendo a Eq. (37) encontramos:

$$\frac{1}{I} - 1 = ae^{-bt} \qquad (39)$$

$$I = \frac{1}{1+ae^{-bt}} \qquad (40)$$

$$\frac{1}{I} = ae^{-bt} + 1 \qquad (41)$$

$$I = \frac{1}{1+ae^{-bt}} \qquad (42)$$

Logo, a solução geral analítica da equação diferencial logística (25) é:

$$I(t) = \frac{1}{1+ae^{-bt}}\,. \qquad (43)$$

5.1. Solução Analítica para o IDHM médio

Na função logística (43), utilizamos $I(0) =$ 0,453 e $I(19) =$ 0,704, que são os dados da tabela 8. Obtemos a solução específica da equação diferencial 24, para a análise do IDHM médio.

$$I(t) = \frac{1}{1 + 1{,}2075\, e^{-0{,}05550289184t}} \tag{44}$$

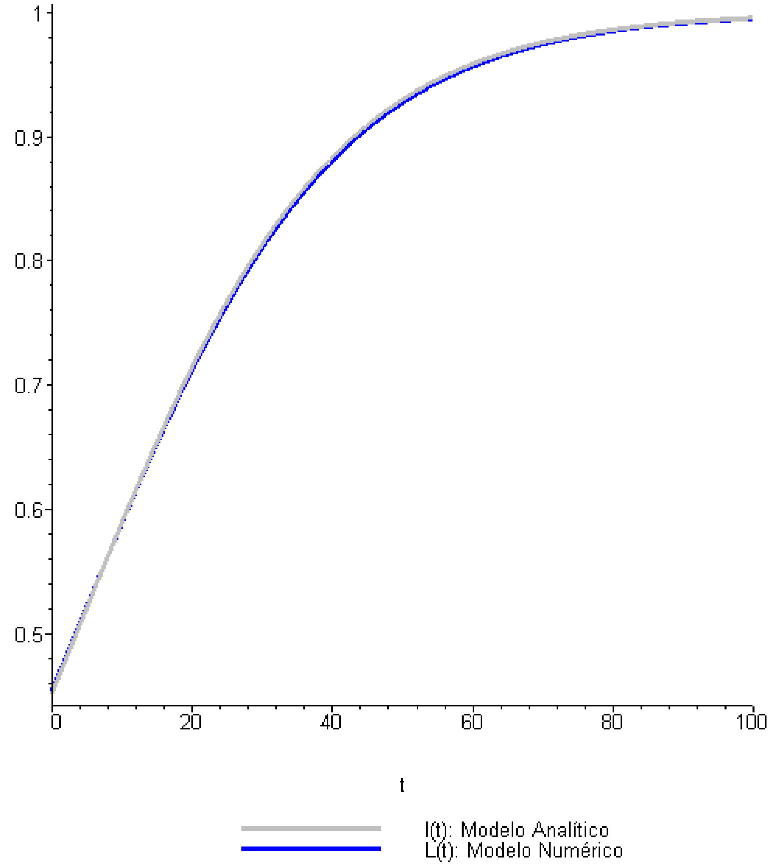
Pelo modelo analítico encontramos a estimativa para 2012 de 0,7265146760, com erro relativo 0,004774416438 que é mais próxima à do PNUD do que a do modelo Logístico calculado pela modelagem numérica dos mínimos quadrados.

Tabela 17: Comparação dos resíduos dos modelos Logístico Numérico e Analítico para o IDHM médio

Ano	t	IDHM médio dos Estados brasileiros	Resíduo ao quadrado	
			Logístico Numérico	Logístico Analítico
1991	0	0,453	$0{,}4457243977 \times 10^{-5}$	$0{,}128255658 \times 10^{-11}$
2000	9	0,576	$0{,}7544541471 \times 10^{-6}$	$0{,}1261546117 \times 10^{-5}$
2010	19	0,704	$0{,}6361870671 \times 10^{-5}$	$0{,}7449778606 \times 10^{-8}$
∑	29	1,733	$0{,}11573568880 \times 10^{-4}$	$0{,}1268997179 \times 10^{-5}$

O modelo analítico apresentou a soma do resíduo ao quadrado 0,000001268991779, enquanto o Logístico numérico 0,00001157356880. Sendo assim, vemos que nossa modelagem numérica ficou muito próxima da solução exata que foi obtida analiticamente. Podemos observar a semelhança do modelo numérico e analítico no gráfico 19.

Gráfico 19– Comparação dos Modelos Longevidade Numérico e Analítico para o IDHM médio.



Fonte: A Autora.

5.2. Solução Analítica para o IDHM – Renda médio

Utilizamos os dados da tabela 11 para a resolução da equação 44, $I(0)$ = 0,599 e $I(19)$ = 0,706. Obtivemos a equação 45, para a análise do IDHM – Renda médio, como a solução analítica obtida pela equação diferencial (24).

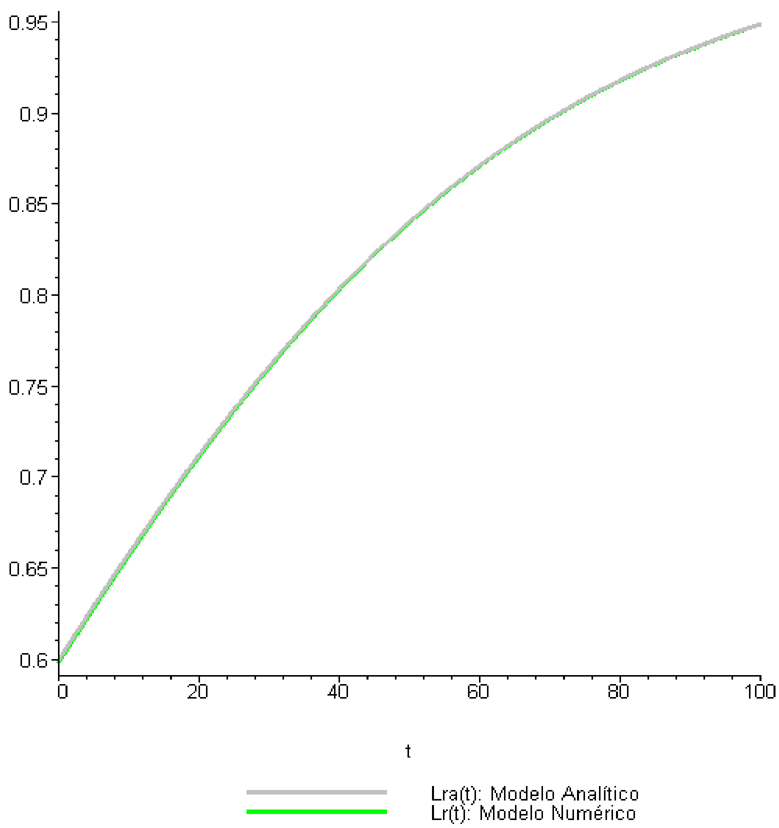
$$I(t) = \frac{1}{1 + 0{,}6694\, e^{-0{,}02518522528t}} \qquad (45)$$

Tabela 18: Comparação dos resíduos ao quadrado, modelos Logístico Numérico e Analítico para o IDHM - Renda médio.

Ano	t	IDHM médio dos Estados brasileiros	Resíduo ao quadrado	
			Logístico Numérico	Logístico Analítico
1991	0	0,5991	$0{,}2380578365\times10^{-5}$	$0{,}1000002000\times10^{-7}$
2000	9	0,6477	$0{,}9054150809\times10^{-5}$	$0{,}1873494008\times10^{-4}$
2010	19	0,7068	$0{,}1383015279\times10^{-5}$	$0{,}2308728302\times10^{-9}$
		∑	$0{,}1281774445\times10^{-4}$	$0{,}1874517097\times10^{-4}$

O modelo Analítico apresentou a soma de quadrado dos resíduos 0,00001874517097, enquanto o Numérico 0,00001281774445. Podemos ver que os dois modelos estão muito próximos.

Gráfico 20 – Comparação dos Modelos Longevidade Numérico e Analítico para o IDHM – Renda médio.



Fonte: A Autora.

5.3. Solução Analítica para o IDHM – Longevidade médio

Para encontrar a solução analítica do IDHM – Longevidade médio, utilizamos na equação 44 os dados da tabela 13. $I(0) = 0,644$ e $I(19) = 0,808$ e assim encontramos a equação 46, como a solução analítica obtida pela equação diferencial 24.

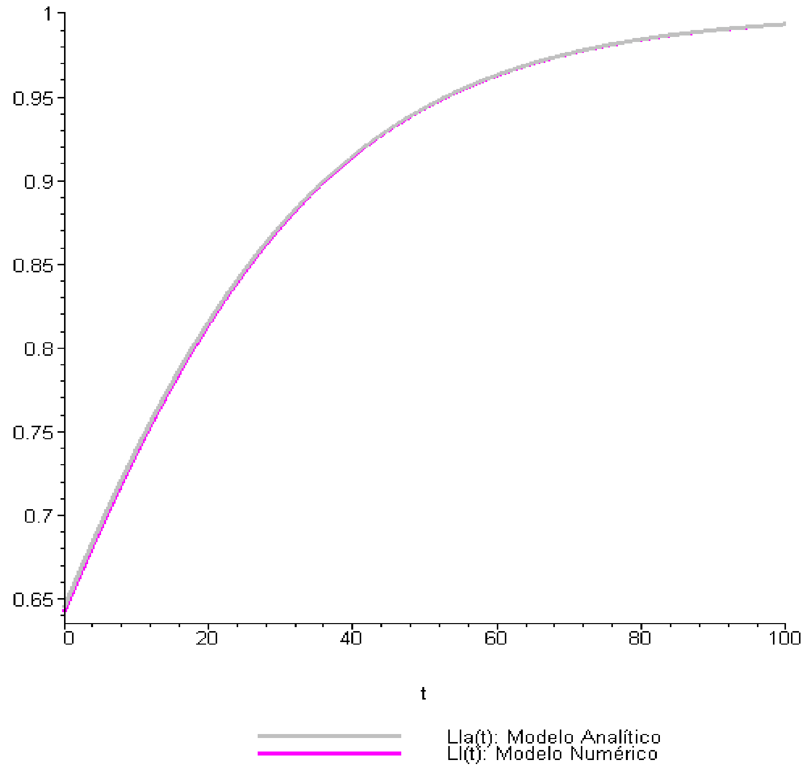
$$I(t) = \frac{1}{1 + 0,5513 e^{-0,04449803809\,t}} \tag{46}$$

Tabela 19: Comparação dos resíduos ao quadrado, modelos Logístico Numérico e Analítico para o IDHM – Longevidade médio.

Ano	t	IDHM médio dos Estados brasileiros	Resíduo ao quadrado	
			Logístico Numérico	Logístico Analítico
1991	0	0,6446	$0,7037407793\times10^{-5}$	$0,1000002000\times10^{-7}$
2000	9	0,7236	$0,2012488954\times10^{-4}$	$0,1873494008\times10^{-4}$
2010	19	0,8086	$0,2571976214\times10^{-5}$	$0,2308728302\times10^{-9}$
		∑	$0,2973427354\times10^{-4}$	$0,1874517097\times10^{-4}$

Encontramos a soma do resíduo ao quadrado para o modelo Analítico 0,00004420990518 e para o Numérico 0,00002973427354. Vemos a proximidade dos modelos no gráfico representado pela figura 21.

Figura 21 – Comparação dos Modelos Logísticos Numérico e Analítico para o IDHM – Longevidade médio.



Fonte: A Autora.

5.4. Solução Analítica para o IDHM – Educação médio

Na equação 44, utilizamos $I(0) =$ 0,245 e $I(19) =$ 0,612, que são os dados da tabela 15. Obtivemos a solução analítica da equação diferencial 24, para a análise do IDHM médio.

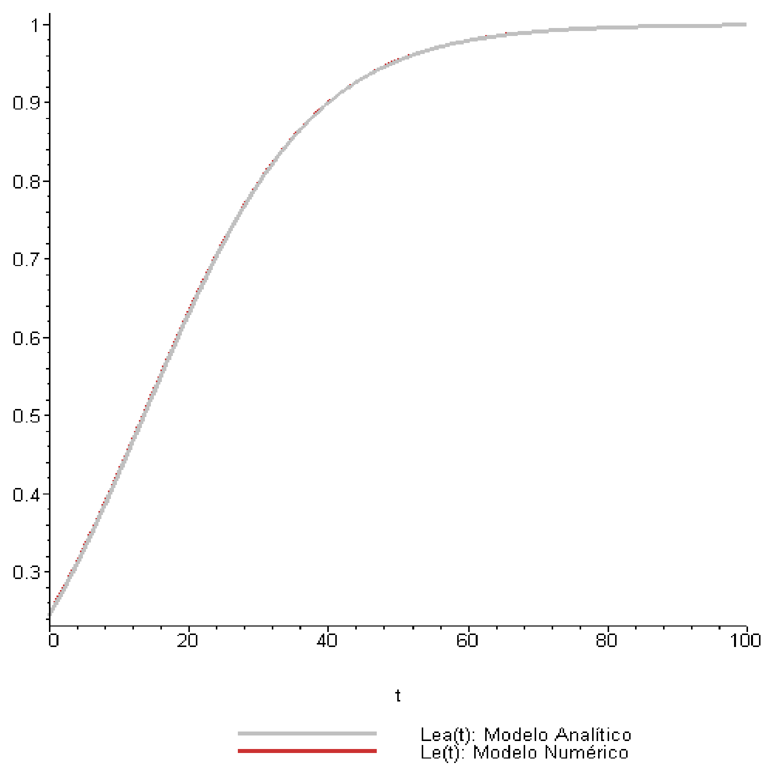
$$I(t) = \frac{1}{1 + 3{,}0733\, e^{-0{,}08316685237t}} \tag{47}$$

Tabela 20: Comparação dos resíduos ao quadrado, modelos Logístico Numérico e Analítico para o IDHM – Educação médio.

Ano	t	IDHM médio dos Estados brasileiros	Resíduo ao quadrado	
			Logístico Numérico	**Logístico Analítico**
1991	0	0,2455	$0,2439621576\times10^{-5}$	$0,1000002000\times10^{-7}$
2000	9	0,4112	$0,4827153496\times10^{-5}$	$0,1873494008\times10^{-4}$
2010	19	0,6124	$0,2451282155\times10^{-5}$	$0,2308728302\times10^{-9}$
		∑	$0,9718257227\times10^{-5}$	$0,1874517097\times10^{-4}$

O modelo analítico apresentou a soma do resíduo ao quadrado 0,00001383088140, enquanto o Logístico numérico 0,000009718057227. Sendo assim, vemos que nossa modelagem numérica ficou muito próxima a solução exata que foi obtida analiticamente. Podemos observar a semelhança do modelo numérico e analítico no gráfico representado pela figura 22.

Figura 22 – Comparação dos Modelos Logísticos Numérico e Analítico para o IDHM – Educação médio.



Fonte: A Autora.

5.5. Estimativas futuras para o IDHM e dimensões

Esta seção traz algumas estimativas realizadas com os três modelos: Quadrático, Logístico Numérico e Logístico Analítico.

A tabela abaixo mostra o ano em que o IDHM brasileiro e dimensões atingem a classificação, Muito Alto, ou seja, a partir de 0,8.

Tabela 21: Ano em que os modelos atingem IDHM Muito Alto

Modelos	IDHM	IDHM - Renda	IDHM - Longevidade	IDHM - Educação
Quadrático	2018	2024	2009	2018
Logístico Numérico	2019	2030	2009	2021
Logístico Analítico	2019	2030	2008	2021

A próxima tabela é uma projeção do ano de 2020, que mostra o valor do IDHM e dimensões em cada um dos modelos.

Tabela 22: Valor do IDHM e dimensões em 2020.

Modelos	IDHM	IDHM - Renda	IDHM - Longevidade	IDHM - Educação
Quadrático	0,823	0,771	0,890	0,830
Logístico Numérico	0,802	0,755	0,867	0,785
Logístico Analítico	0,806	0,756	0,868	0,784

E abaixo uma projeção para o ano de 2030 com os respectivos valores do IDHM e dimensões calculados pelos três modelos.

Tabela 23: Valor do IDHM e dimensões em 2030.

Modelos	IDHM	IDHM - Renda	IDHM - Longevidade	IDHM - Educação
Quadrático	0,933	0,842	0,969	1,000
Logístico Numérico	0,875	0,799	0,911	0,893
Logístico Analítico	0,878	0,800	0,911	0,893

6. MODELAGEM MATRICIAL

Para a realização da modelagem matricial utilizaremos a teoria de Sistemas Dinâmicos Discretos, que nos fornece o estado de uma sequência discreta de tempos $\{t_0, t_1, t_2, ...\}$.

A expressão sistemas dinâmicos está associada à determinação de leis que fazem a relação do estado atual e futuro de processos evolutivos em áreas aplicadas como biologia, física, economia ou engenharia, dentre outras. Como exemplos de sistemas dinâmicos, temos as equações de ondas, os modelos de crescimento populacional e as equações do calor (Nunes 2010). Processos dinâmicos são utilizados para medir ou estimar mudanças em longo prazo.

O objetivo dessa sessão é aplicar a teoria dos sistemas dinâmicos discretos na análise de dados disponibilizados pelo Programa das Nações Unidas (PNUD), para descrever o comportamento de algumas dimensões do Índice de Desenvolvimento Humano Municipal dos estados Brasileiros. Para isso, utilizaremos teoremas de Álgebra Linear e calcularemos uma matriz resultante, denominada matriz de transição. Esta matriz deverá ter o valor da soma dos elementos de cada linha igual a 1. Após, faremos uma análise de seus autovalores e autovetores correspondentes, podendo encontrar uma matriz de equilíbrio e verificar em quanto tempo este equilíbrio acontece, para que isso seja possível a matriz de transição deve ser diagonalizável. Por esse motivo modelaremos por este método somente as dimensões Renda e Longevidade do IDHM.

A seguir, veremos alguns conceitos de álgebra que serão utilizados durante a modelagem.

I. Autovalores e Autovetores[2]

- Seja T: V $\rightarrow$ V um operador Linear. Se existem v $\in$ V, v≠0, e $\lambda \in \Re$ tais que Tv = λv, λ é dito Autovalor de T e v o autovetor de T associado a λ.
- Dada uma matriz quadrada A, de ordem n. Um Autovalor $\lambda \in \Re$ de A, e um Autovetor v$\in \Re^n$, são soluções da equação $Av = \lambda v$, $v \neq 0$.

[2]BOLDRINI, C. Álgebra Linear. 3ª ed. Editora Harbra, 1986.

II. Sistemas Dinâmicos Discretos[3]

Consideremos o sistema dinâmico descrito pela equação de diferenças

$v_{k+1} = v_k A$, (48)

Com v_0 vetor inicial conhecido. Então:

$v_1 = Av_0$

$v_2 = Av_1 = A(Av_0) = A^2 v_0$,

$v_3 = Av_2 = A(A^2 v_0) = A^3 v_0$

$\equiv$

$v_k = Av_{k-1} = A(A^{k-1} v_0) = A^k v_0$ (49)

Seja $\rho = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots, |\lambda_n|\}$, o raio espectral (maior autovalor, em módulo) de A.

O comportamento da sequência $Av_0, A^2 v_0, A^3 v_0, \cdots A^k v_0$ para qualquer valor inicial v_0 é determinado pelo comportamento de $\lim_{k \to \infty} \rho^k$. Logo:

- Se $\rho < 1$ então $\lim_{k \to \infty} A^k = 0$ e a sequência $Av_0, A^2 v_0, A^3 v_0, \cdots A^k v_0$ é estável.
- Se $\rho = 1$ então existe uma matriz de equilíbrio $E \neq 0$ tal que $\lim_{k \to \infty} A^k = E$ e a sequência $Av_0, A^2 v_0, A^3 v_0, \cdots A^k v_0$ é dita neutramente estável. Ou, o processo iterativo possui um estado estacionário estável. Isso vale se para um único i $|\lambda_1| = 1$ e $|\lambda_n| < 1$ para todos os demais i.
- Se $\rho > 1$ então existe $\lim_{k \to \infty} A^k$ e a sequência $Av_0, A^2 v_0, A^3 v_0, \cdots A^k v_0$ é dita instável.

Sejam λ_1, λ_2, ..., λ_n os autovalores da matriz A_{mxn}. Se A é diagonalizável, isto é, $A = PDP^{-1}$, com P matriz cujas colunas são os autovetores de A e D matriz cuja diagonal principal representa os Autovalores de A.

---

[3] HAUSER, Eliete Biasotto. Notas de aula de Álgebra Linear e Modelos Lineares – Métodos Quantitativos. Porto Alegre 2012.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \text{ e } \lim_{k\to\infty} D^K = \begin{bmatrix} \lim_{k\to\infty}\lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lim_{k\to\infty}\lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lim_{k\to\infty}\lambda_3^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lim_{k\to\infty}\lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Assim, como $A^k = PD^kP^{-1}$ segue que:

$$\lim_{k\to\infty} A^K = P \begin{bmatrix} \lim_{k\to\infty}\lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lim_{k\to\infty}\lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lim_{k\to\infty}\lambda_3^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lim_{k\to\infty}\lambda_n^k \end{bmatrix} P = 1$$

6.1. Modelagem por Sistemas Dinâmicos Discretos para IDHM - Renda

A tabela abaixo resume a classificação do IDHM - Renda das unidades da federação nos anos de 1991, 2000 e 2010. A coluna da direita da tabela a seguir representa os níveis de classificação do IDHM: muito baixo, baixo, médio, alto e muito alto, respectivamente.

Tabela 17: Quantidade de estados distribuídos por classificação nos anos de 1991, 2000 e 2010.

IDHM	1991	2000	2010
MB	2	0	0
B	11	7	0
M	12	14	15
A	2	5	11
MA	0	1	1

A partir dos dados da tabela 17 iremos construir a matriz resultante A, representada por elementos a_{ij} que diz respeito à probabilidade de um estado estar na situação *i* e migrar para a situação *j*.

Primeiro iremos construir as tabelas comparativas das mudanças na classificação dos estados em cada período. A matriz de transição A, será a matriz percentual resultante da soma das tabelas dos períodos de 1991 a 2000 e de 2000 à 2010.

Tabela 18: Migração dos estados no período entre 1991 e 2000.

IDHM	MB	B	M	A	MA
MB	0	2	0	0	0
B	0	5	6	0	0
M	0	0	8	4	0
A	0	0	0	1	1
MA	0	0	0	0	0

Na tabela 18, temos a quantidade de estados que estavam em situação i (linha) em 1991 e migraram para situação j (coluna) em 2000. Podemos observar que:

- Das 2 Unidades da Federação (UF) que tinham IDHM - Renda Muito Baixo em 1991, as duas migraram para a classificação Baixo em 2000;
- Das 11 UF classificadas com IDHM – Renda Baixo, em 1991, 5 permaneceram nesta classificação e 6 subiram para a classificação médio.
- Das 12 UF com IDHM – Renda classificado Médio em 1991, 8 continuaram na mesma classificação e 4 migraram para Alto em 2000.
- Das 2 UF com Classificação Alto em 1991, uma continuou na mesma classificação e a outra evoluiu para IDHM – Renda Muito Alto.

Da mesma forma procederemos para o período de 2000 a 2010.

Tabela 19: Migração dos estados no período entre 2000 e 2010.

IDHM	MB	B	M	A	MA
MB	0	0	0	0	0
B	0	0	7	0	0
M	0	0	8	6	0
A	0	0	0	5	0
MA	0	0	0	0	1

Na tabela 19, temos a quantidade de estados que estavam em situação i em 2000 e foram para situação j em 2010. Podemos observar que:

- Não haviam UF classificadas com IDHM – Renda Muito Baixo;
- Das 7 UF com IDHM - Renda Baixo em 2000, as 7 migraram para Médio em 2010;
- Das 14 classificadas com IDHM – Renda Médio em 2000, 8 permaneceram neste estado e 6 migraram para alto em 2010.
- Das 5 Unidades com IDHM - Renda Alto em 2000, as 5 permaneceram neste estado em 2010.
- A Unidade com classificação do IDHM – Renda Muito Alto, permaneceu na mesma situação.

Somando as matrizes representadas nas tabelas 18 e 19, construímos a matriz representada na tabela 20, de onde resultará a matriz de transição A.

Tabela 20: matriz soma das matrizes representadas pelas tabelas 18 e 19.

IDHM	MB	B	M	A	MA	TOTAL
MB	0	2	0	0	0	2
B	0	5	13	0	0	18
M	0	0	16	10	0	26
A	0	0	0	6	1	7
MA	0	0	0	0	1	1
TOTAL	0	7	29	16	2	54

Para encontrar a matriz de transição A, dividimos os elementos não nulos aij, pelo valor de sua linha correspondente. O mesmo vale para o vetor inicial V_0, formado pela linha resultante da soma de cada coluna. O vetor V_0 é o vetor de probabilidade inicial, formado pela percentagem de unidades da federação pertencentes a cada classificação.

V_0 = [0   0,12963   0,537037   0,296296   0,037037].

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2778 & 0{,}7222 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6154 & 0{,}3846 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}8571 & 0{,}1429 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Matriz de transição dimensão Renda

Utilizando o software MATLAB encontramos os autovalores da matriz A, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0.2778$, $\lambda_3 = 0.6154$, $\lambda_4 = 0{,}8571$, $\lambda_5 = 1$. Representados na Matriz D.

$$D= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2778 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6154 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}8571 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E seus respectivos autovetores representados na matriz P:

$$P= \begin{bmatrix} 1 & 0{,}9635 & 0{,}8272 & 0{,}6463 & 0{,}4472 \\ 0 & 0{,}2677 & 0{,}5091 & 0{,}5540 & 0{,}4472 \\ 0 & 0 & 0{,}2380 & 0{,}4443 & 0{,}4472 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2792 & 0{,}4472 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4472 \end{bmatrix}$$

Verificamos que a Matriz A é diagonalizável calculando PDP^{-1}.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}9635 & 0{,}8272 & 0{,}6463 & 0{,}4472 \\ 0 & 0{,}2677 & 0{,}5091 & 0{,}5540 & 0{,}4472 \\ 0 & 0 & 0{,}2380 & 0{,}4443 & 0{,}4472 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2792 & 0{,}4472 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4472 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2778 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6154 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}8571 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2778 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6154 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}8571 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2778 & 0{,}7222 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6154 & 0{,}3846 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}8571 & 0{,}1429 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{A}$$

Analisando o raio espectral de A, concluímos que existe uma matriz de equilíbrio **E** tal que $\lim_{k\to\infty} A^k = \mathrm{E}$.

Para encontrar a matriz de equilíbrio temos que calcular as potências da matriz A, verificando onde ocorre a estabilidade.

Verificamos que $\mathbf{A^{70}} = \mathbf{A^{71}}$, então $\mathbf{A^{70}}$ é a matriz de equilíbrio:

$$\mathbf{A^{70} = E =} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A Matriz A^{70} representa o ano de 2710, que pelo processo apresentado, representa o período em que todos os estados atingirão a classificação, Muito Alto, na dimensão Renda, ou seja a erradicação da pobresa .

Como o cálculo do IDHM (e dimensões) é feito a cada dez anos, consideramos o ano de 2020 a multiplicação de A pelo vetor inicial. A^2 como o ano que representa 2030, A^3= 2040 e assim A^{70} representa o ano de 2710.

Na distribuição inicial, representada pelo vetor V_0,

$$V_0 = [\,0 \quad 0{,}12963 \quad 0{,}537037 \quad 0{,}296296 \quad 0{,}037037],$$

não haviam unidades da federação (UF) na classificação Muito Baixo, 12,9% das unidades da federação (UF) estavam na classificação Baixo, 53,7% das UF na classificação Médio, 29,6% na classificação Alto e 3,7% classificadas como Muito Alto.

Realizando a multiplicação de V_0 pela matriz A, obtemos o vetor V_1.

$$v_1 = v_0 A,$$
$$V_1 = [0 \quad 0{,}0360 \quad 0{,}4241 \quad 0{,}4605 \quad 0{,}0794],$$

que é a representação da percentagem de unidades da federação em cada classificação no ano de 2020. Em 2020, estima-se, aproximadamente, que não haverá unidades da federação na classificação Muito Baixo, que 3,6% das unidades da federação estarão na classificação Baixo, 42,4% estarão na classificação médio, 46,0% em Alto e 7,9% em Muito Alto.

Vemos na tabela abaixo a ilustração das estimativas para alguns anos futuros.

Tabela 21: Distribuições futuras do IDHM - Renda

	Estimativa				
Ano	Muito Baixo	Baixo	Médio	Alto	Muito Alto
2030	0%	1,00%	28,70%	55,78%	14,52%
2040	0%	0,28%	18,38%	58,85%	22,49%
2050	0%	0,08%	11,51%	57,51%	30,90%
2060	0%	0,02%	7,14%	53,72%	39,12%
2070	0%	0,01%	4,41%	48,79%	46,79%

6.2. Modelagem por Sistemas Dinâmicos Discretos para IDHM – Longevidade

A tabela abaixo resume a classificação do IDHM - Longevidades das unidades da federação nos anos de 1991, 2000 e 2010.

Tabela 21: Quantidade de estados distribuídos por classificação do IDHM Longevidade.

IDHM	1991	2000	2010
MB	0	0	0
B	8	0	0
M	15	10	0
A	4	14	12
MA	0	3	15

Realizamos os mesmos procedimentos executados no processo para Renda, para encontrar a Matriz de transição, para a dimensão Longevidade.

Tabela 22: Migração dos estados no período entre 1991 e 2000.

IDHM	MB	B	M	A	MA
MB	0	0	0	0	0
B	0	0	7	1	0
M	0	0	3	12	0
A	0	0	0	1	3
MA	0	0	0	0	0

Lê-se:

- Não haviam Unidades da Federação (UF) com IDHM - Longevidade Muito Baixo no tempo inicial 1991
- Das 8 UF classificadas com IDHM – Longevidade Baixo, em 1991, 7 migraram para a classificação Médio e 1migrou para a classificação Alto.
- Das 15 UF com IDHM – Longevidade classificado Médio em 1991, 3 continuaram na mesma classificação e 12 migraram para Alto em 2000.
- Das 4 UF com Classificação Alto em 1991, 1 continuou na mesma classificação e 3 evoluíram para IDHM – Longevidade Muito Alto.

Tabela 23: Migração dos estados no período entre 2000 e 2010

IDHM	MB	B	M	A	MA
MB	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0
M	0	0	0	8	2
A	0	0	0	4	10
MA	0	0	0	0	3

Lê-se:

- Não haviam UF classificadas com IDHM – Longevidade Muito Baixo e Baixo em 2000;
- Das 10 classificadas com IDHM – Longevidade Médio em 2000, 8 migraram para Alto e 2 migraram para Muito Alto em 2010.
- Das 14 Unidades com IDHM - Longevidade Alto em 2000, 4 permaneceram neste estado e 10 migraram para Muito Alto em 2010.
- As 3 Unidades com classificação do IDHM – Longevidade Muito Alto em 2000, permaneceram nesta classificação em 2010.

A seguir realizamos a matriz soma das matrizes anteriores.

Tabela 24: matriz soma das matrizes representadas pelas tabelas 22 e 23**.**

IDHM	MB	B	M	A	MA	Total
MB	0	0	0	0	0	0
B	0	0	7	1	0	8
M	0	0	3	20	2	25
A	0	0	0	5	13	18
MA	0	0	0	0	3	3
Total	0	0	10	26	18	54

Como a dimensão Longevidade não possui nenhuma Unidade da Federação, na classificação “Muito Baixo”, desconsideramos esta variável encontrando como matriz de transição B, uma matriz de dimensão 4x4.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}8750 & 0{,}1250 & 0 \\ 0 & 0{,}1200 & 0{,}8000 & 0{,}0800 \\ 0 & 0 & 0{,}2778 & 0{,}7222 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Matriz de transição dimensão Longevidade

E como vetor inicial, um vetor 1x4.

U_0 = [0   0,185185   0,481481   0,333333].

Utilizando o software MATLAB encontramos os autovalores da matriz B, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0{,}1200$ $\lambda_3 = 0.2778$, $\lambda_4 = 1$. Que estão representados na matriz diagonal D1.

$$D1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2778 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E os Autovetores, representados nas colunas da Matriz P.

$$P1= \begin{bmatrix} 1 & 0{,}9907 & 0{,}9539 & 0{,}5000 \\ 0 & 0{,}1359 & 0{,}2945 & 05000 \\ 0 & 0 & 0{,}0581 & 0{,}5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5000 \end{bmatrix}$$

Verificamos que a matriz B é Diagonalizável calculando PDP^{-1}

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}9907 & 0{,}9539 & 0{,}5000 \\ 0 & 0{,}1359 & 0{,}2945 & 05000 \\ 0 & 0 & 0{,}0581 & 0{,}5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2778 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -7{,}2917 & 20{,}5484 & -14{,}2567 \\ 0 & 7{,}3599 & -37{,}3126 & 29{,}9527 \\ 0 & 0 & 17{,}2122 & -17{,}2122 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0{,}8750 & 0{,}1250 & 0 \\ 0 & 0{,}1200 & 0{,}8000 & 0{,}0800 \\ 0 & 0 & 0{,}2778 & 0{,}7222 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{Matriz B.}$$

Analisando o raio espectral de B, concluímos que existe uma matriz de equilíbrio **E** tal que $\lim_{k\to\infty} B^k = $ **E.**

Para encontrar a matriz de equilíbrio temos que calcular as potências da matriz B, verificando onde ocorre a estabilidade.

Verificamos que $\mathbf{B^{10}} = \mathbf{B^{11}}$, então $\mathbf{B^{10}}$ é a matriz de equilíbrio:

$$\mathbf{B^{10}} = \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na estimativa futura para Longevidade, $\mathbf{B}^{10}$, que representa a matriz de equilíbrio **E**, retrata segundo o estudo pelos sistemas dinâmicos discretos, o ano em que todos os estados da federação alcançarão, na dimensão Longevidade, IDHM Classificação Muito Alto.

Para o cálculo do ano de 2020 realizamos a multiplicação, da matiz B pelo vetor U_0, para 2030 utilizamos B^2, B^3 representa 2040 e assim B^{10} representa o ano de 2110.

Na distribuição inicial, representada pelo vetor U_0,

$$U_0 = [0 \quad 0{,}185185 \quad 0{,}481481 \quad 0{,}333333],$$

Podemos observar que não haviam unidades da federação (UF) na classificação Baixo, 18,51% das unidades da federação (UF) estavam na classificação Médio, 48,14% das UF na classificação Alto e 33,33% na classificação Muito Alto.

Multiplicando o vetor U_0 pela matriz B, obtemos o vetor U_1,

$$U_1 = U_0 B$$

$$U_1 = [0 \quad 0{,}0222 \quad 0{,}2819 \quad 0{,}6959]$$

que representa a percentagem de unidades da federação em cada classificação no ano de 2020. Em 2020, estima-se que não haverá unidades da federação na classificação Baixo, 2,22% estarão na classificação Médio, 28,19% em Alto e 59,59% em Muito Alto.

A tabela a seguir, ilustra as estimativas para alguns anos futuros.

Tabela 25: Distribuição futura do IDHM - Longevidade

Ano	Estimativa			
	Baixo	Médio	Alto	Muito Alto
2030	0%	0,27%	9,61%	90,12%
2040	0%	0,30%	2,88%	97,09%
2050	0%	0%	8,30%	99,17%
2060	0%	0%	0,23%	99,77%
2070	0%	0%	0,06%	99,93%

7. CONCLUSÃO

Neste trabalho de conclusão de curso, analisou-se o Índice de Desenvolvimento Humano das unidades da federação brasileira, utilizando modelagem matemática, em três abordagens: numérica, analítica e matricial.

Na modelagem numérica, em que os parâmetros foram determinados por meio da aplicação do critério dos mínimos quadrados, o modelo Quadrático se mostrou aplicável até o ano em que atinge o valor do IDHM médio igual a 1. Este modelo, apesar de apresentar um erro relativo pequeno, não pode ser usado para projeções a longo prazo, pois, sabe-se que o IDHM está limitado entre zero e um. Neste caso elegeu-se como melhor modelo o Logístico, pois preserva essa característica e também possui erro relativo pequeno.

Na modelagem analítica, em que a solução exata da equação diferencial logística foi obtida pela técnica de separação de variáveis e decomposição em frações parciais, comprovou-se a eficácia do modelagem numérica, pois os resultados obtidos nas duas formas de modelagem foram muito próximos. Pelo modelo analítico encontrou-se a estimativa para 2012 de 0,7265146760, com erro relativo 0,004774416438 e pelo modelo numérico encontramos 0,7237674734, com erro relativo, 0,00853770941.

Comparando algumas estimativas entre os dois modelos, nota-se que os valores encontrados são semelhantes. Os dois modelos projetaram que, em 2019, o IDHM alcançará a classificação muito alto, e que o mesmo ocorrerá para a dimensão Renda em 2030 e para dimensão Educação em 2021.

Para a modelagem matricial, optou-se pela a teoria dos Sistemas Dinâmicos Discretos para os dados relativos à Renda e à Longevidade. Isso possibilitou estimar a distribuição dos estados brasileiros em termos da classificação do IDHM. Este modelo foi utilizado para estimar as próximas distribuições para os IDHM Renda e Longevidade. Para a próxima distribuição, que acontecerá na medição de 2020, o modelo estimou para a dimensão Renda $V_1 = [0 \quad 0{,}0360 \quad 0{,}4241 \quad 0{,}4605 \quad 0{,}0794]$, que é a representação da percentagem de unidades da federação em cada classificação neste ano. Em 2020, estimou-se, aproximadamente, que não haverá unidades da federação na classificação Muito Baixo, que 3,6% das unidades da federação estarão na classificação Baixo, 42,4% estarão na classificação médio, 46,0% em Alto e 7,9% em Muito Alto.

Para Longevidade, o modelo projetou em 2020 a distribuição:

$$U_1 = [0 \quad 0{,}0222 \quad 0{,}2819 \quad 0{,}6959],$$

que representa a percentagem de unidades da federação em cada classificação no ano de 2020. Neste ano, estima-se que não haverá unidades da federação na classificação Baixo, 2,22% estarão na classificação Médio, 28,19% em Alto e 69,59% em Muito Alto.

Dando continuidade ao estudo, pretende-se modelar dados do IDH global, objetivando a comparação do Índice de Desenvolvimento Humano entre os países. Pretende-se ainda refazer o estudo do IDHM dos estados, daqui a alguns anos, quando forem disponibilizados mais dados, aumentando a precisão do estudo, que foi realizado com apenas três anos, que são os dados disponibilizados até o presente momento.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard. **Álgebra linear contemporânea.** Porto Alegre: Bookman, 2006.

BARROSO, Leonidas. Conceição et al. **Cálculo Numérico com Aplicações**. 2.ed. São Paulo: Harbra, 1987.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002. 389 p.

BATSCHELET, Edward. **Introdução à matemática para biocientistas.** São Paulo: Universidade de São Paulo, 1978.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2000. 127 p.

BOLDRINI, José Luis .... [et al.]. **Álgebra Linear**. 3ª ed. São Paulo: Editora Harper & Row do Brasil 1980.

BURDEN, Richard L. **Análise numérica**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

CHAPRA, Steven C. **Métodos numéricos para engenharia.** São Paulo: McGraw-Hill, 2008.

HAUSER, Eliete Biasotto. **Notas de aula de Álgebra Linear e Modelos Lineares**: Métodos Quantitativos. Porto Alegre 2012.
______. **Apostila de Cálculo Numérico**. Porto Alegre 2009.

IBGE. **Projeção da população do Brasil por sexo e idade** – 1980–2050. Série Estudos e pesquisas, 2008. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/projecao_da_populacao/2008/projecao.pdf> Acesso em 03/09/2013.
______.<http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/tabuadevida>Acesso em 09/12/2013.

IS, C. N; **Desenvolvimento e políticas sociais**: uma relação necessária. Revista Textos & Contextos, v. 6 n. 2 p. 314- 334. 2007. Disponível em <http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/fass/article/viewFile/2321/3250> Acesso em: 02/09/13.

MEYER, Walter J. **Concepts of mathematical modeling**. New York: McGraw-Hill, 1984.

NUNES, Roney Rachide**. Sistemas Dinâmicos Discretos Lineares**. Universidade Federal de Minas Gerais, 2010.

PNUD Brasil, Desenvolvimento Humano e IDH. http://www.pnud.org.br/IDH acesso em 28/08/2013.
______.Atlas do desenvolvimento Humano 2013. http://atlasbrasil.org.br/2013/download acesso em 13/09/2013.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL. Biblioteca Central Ir. José Otão. **Modelo para apresentação de trabalhos acadêmicos, teses e dissertações elaborado pela Biblioteca Central Irmão José Otão**. 2011. Disponível em: <www.pucrs.br/biblioteca/trabalhosacademicos>. Acesso em: março de 2013.

REIDEL, M. A convergência do índice de desenvolvimento humano frente à liberalização econômica dos países: Uma aplicação da Matriz de Markov entre 1980 a 2009. Dissertação (Mestrado) Programa de Pós-Graduação em Economia – Faculdade de Administração, Contabilidade e Economia, PUCRS. Porto Alegre, 2012.

ROTTA, E.; REIS. Desenvolvimento e políticas sociais: uma relação necessária. Revista Textos & Contextos, v. 6 n. 2. 2007.331p

ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem.** Tradução da 9ª Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.
______. **Equações diferenciais volume 1.** São Paulo: Makron Books, 2001.

ANEXOS

ANEXO A - Arquivo Maple Critério dos Mínimos Quadrados

IDHM

QUADRÁTICO MÉDIO

```
> #Xvalues:=[1991,2000,2010];
> Xvalues:=[0,9,19];
```

$$Xvalues := [0, 9, 19]$$

```
> Yvalues:=[0.453, 0.576,0.704];
```

$$Yvalues := [0.453, 0.576, 0.704]$$

```
> eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y], y=a*x^2+b*x+c,
{a,b,c}]]([Xvalues, Yvalues]);
```

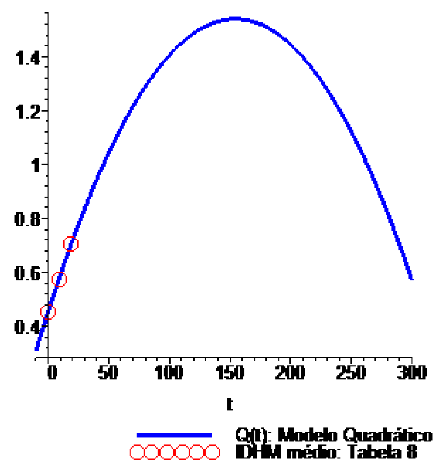
$$eq\_fit := y = -0.00004561403509\, x^2 + 0.01407719298\, x + 0.4530000000$$

```
>
> q:=t->-.4561403509e-4*t^2+.1407719298e-1*t+.4530000000;
>
```

$$q := t \to -0.00004561403509\, t^2 + 0.01407719298\, t + 0.4530000000$$

Gráfico:

```
> Q:=plot([q(t)], t=-10..300,color=blue,thickness=3,legend =
["Q(t): Modelo Quadrático"]):
>Q1:=pointplot([0,0.453,9,0.576,19,0.704],symbol=circle,symbolsiz
e=20,color=red,legend="IDHM médio: Tabela 8"):
> display(Q,Q1);
```



Validade:

```
> q(0):=-.4561403509e-4*0^2+.1407719298e-1*0+.4530000000;
```

$$q(0) := 0.4530000000$$

```
> q(9):=-.4561403509e-4*9^2+.1407719298e-1*9+.4530000000;
```

$$q(9) := 0.5760000000$$

```
> q(19):=-.4561403509e-4*19^2+.1407719298e-1*19+.4530000000;
```

$$q(19) := 0.7039999999$$

Soma do quadro do resíduo

```
> (q(0)-0.453)^2;
```

$$0.$$

```
> (q(9)-0.576)^2;
```

$$0.$$

```
> (q(19)-0.704)^2;
```

$$0.1\ 10^{-19}$$

Logo o resíduo ao quadrado será muito próximo à zero.

Estimativa para 2012

```
> q(21):=-.4561403509e-4*21^2+.1407719298e-1*21+.4530000000;
```

$$q(21) := 0.7285052631$$

Resíduo

```
> (0.730-.7285052631)/0.730;
```

$$0.002047584795$$

IDHM máximo

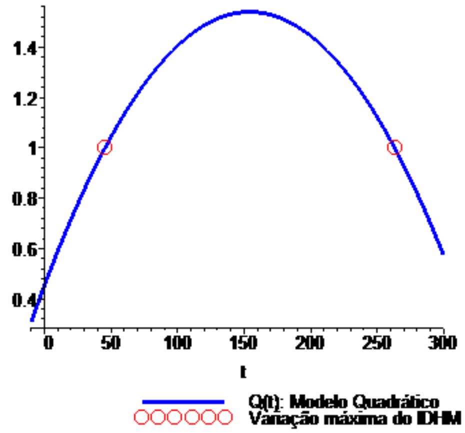
```
> fsolve(q(t)=1,t);
```

$$45.59274014, 263.0226444$$

```
> solve(diff(q(t),t)=0,t);
```

$$154.3076923$$

```
> K:=plot([q(t)], t=-10..300,color=blue,thickness=3,legend = ["Q(t): Modelo Quadrático"] ):
>
K1:=pointplot([45.59274014,q(45.59274014),263.0226444,q(263.0226444)],symbol=circle,symbolsize=20,color=red,legend="Variação máxima do IDHM"):
> display(K,K1);
```




```
> q(45.59274014);
```

$$1.000000000$$

```
> 1991+45.59274014;
>
```

$$2036.592740$$

LOGÍSTICO MÉDIO

```
> solve({3*la+28*b=-0.98423643,28*la+442*b=-
19.021932698},{la,b});
>
```

$$\{b = -0.05444128792, la = 0.1800398773\}$$

```
> a:=exp(.1800398773);
```

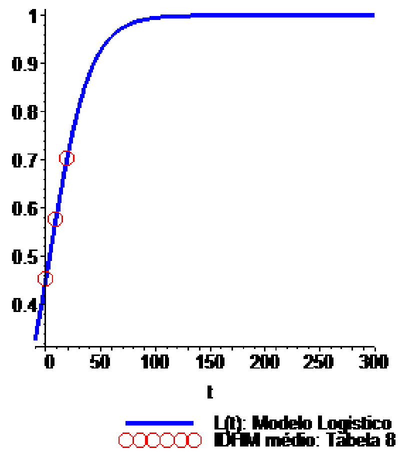
$$a := 1.197265106$$

```
> l:=t->1/(1+1.197265106*exp(-.5444128792e-1*t));
```

$$l := t \rightarrow \frac{1}{1 + 1.197265106\ \mathbf{e}^{(-0.05444128792\, t)}}$$

Gráfico

```
> L:=plot([l(t)], t=-
10..300,color=blue,thickness=3,legend=["L(t): Modelo Logístico"]
):
>L1:=pointplot([0,0.453,9,0.576,19,0.704],symbol=circle,symbolsiz
e=20,color=red,legend="IDHM médio: Tabela 8"):
> display(L,L1);
```



Validade

```
> l(0.);l(9.);l(19.);
```

0.4551112186

0.5768685932

0.7014777251

Soma do quadro do resíduo

```
> (lr(0)-0.5991)^2;
```

$0.2380578365\ 10^{-5}$

```
> (lr(9)-0.6477)^2;
```

$0.9054150809\ 10^{-5}$

```
> (lr(19)-0.7068)^2;
```

$0.1383015279\ 10^{-5}$

```
> .2380578365e-5+.9054150809e-5+.1383015279e-5;
```

0.00001281774445

Estimativa para 2012

```
> 2012-1991;
```

21

```
> l(21);
```

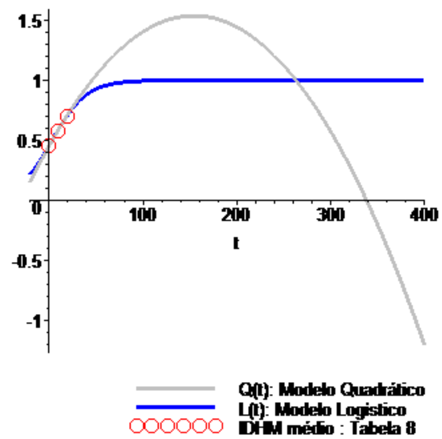
0.7237674724

```
> (0.730-.7237674724)/0.730;
```

0.008537709041

Comparação entre os modelos

```
> A:=plot( [q(t) ,l(t)] , t=-20...400,legend=["Q(t): Modelo
Quadrático","L(t): Modelo Logístico"], color = [grey,blue],
thickness=3):
> #display(A);
>#pointplot([0,0.453,9,0.576,19,0.704],symbol=circle,symbolsize=2
0,color=red);
>A1:=pointplot([0,0.453,9,0.576,19,0.704],symbol=circle,symbolsiz
e=20,color=red,legend="IDHM médio : Tabela 8"):
> display(A,A1);
```



QUADRÁTICO MÉDIO RENDA:

```
> Xvalues:=[0,9,19];
```

$$Xvalues := [0, 9, 19]$$

```
> Yvalues:=[0.599, 0.647,0.706];
```

$$Yvalues := [0.599, 0.647, 0.706]$$

```
> eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y], y=a*x^2+b*x+c,
{a,b,c}]]([Xvalues, Yvalues]);
```

$$eq\_fit := y = 0.00002982456140\, x^2 + 0.005064912281\, x + 0.5990000000$$

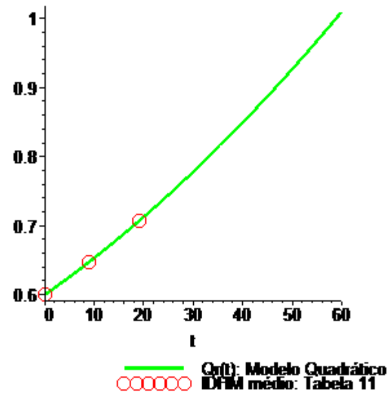
```
> qr:=t->.2982456140e-4*t^2+.5064912281e-2*t+.5990000000;
>
```

$$qr := t \to 0.00002982456140\, t^2 + 0.005064912281\, t + 0.5990000000$$

Gráfico

```
> Qr:=plot([qr(t)],
t=0..60,color=green,thickness=3,legend=["Qr(t): Modelo
Quadrático"] ):
```

```
> Qr1:=pointplot([0,0.599,9,0.647,19,0.706],symbol=circle,symbolsize=20,color=red,legend="IDHM médio: Tabela 11"):
> display(Qr,Qr1);
```



Validade:

```
> qr(0):=.2982456140e-4*0^2+.5064912281e-2*0+.5990000000;
```

$$qr(0) := 0.5990000000$$

```
> qr(9):=.2982456140e-4*9^2+.5064912281e-2*9+.5990000000;
```

$$qr(9) := 0.6470000000$$

```
> qr(19):=.2982456140e-4*19^2+.5064912281e-2*19+.5990000000;
```

$$qr(19) := 0.7060000000$$

Soma do quadro do resíduo

```
> (qr(0)-0.599)^2;
```

$$0.$$

```
> (qr(9)-0.647)^2;
```

$$0.$$

```
> (qr(19)-0.706)^2;
```

$$0.$$

Resíduo zero.

IDHM máximo

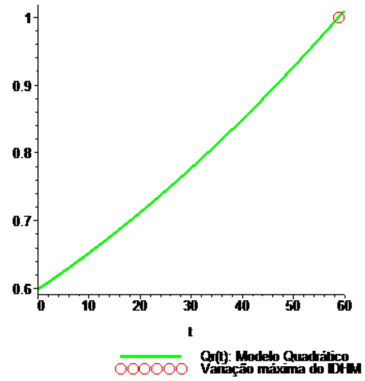
```
> fsolve(qr(t)=1,t);
> solve(diff(qr(t),t)=0,t);
```

$$-228.6312899, 58.80776042$$

$$-84.91176472$$

```
> M:=plot([qr(t)],
t=0..60,color=green,thickness=3,legend=["Qr(t): Modelo
Quadrático"] ):
```

```
>
M1:=pointplot([58.80776042,qr(58.80776042)],symbol=circle,symbolsize=20,color=red,legend="Variação máxima do IDHM"):
> display(M,M1);
```




```
> qr(58.80776042);
```

$$1.000000000$$

```
> 1991+58.80776042;
```

$$2049.807760$$

LOGÍSTICO MÉDIO RENDA

```
> solve({3*la+28*b=-1.891678348,28*la+442*b=-22.20968177},{la,b});
```

$$\{b=-0.02520673721, la=-0.3952965687\}$$

```
> a:=exp(-.3952965687);
```

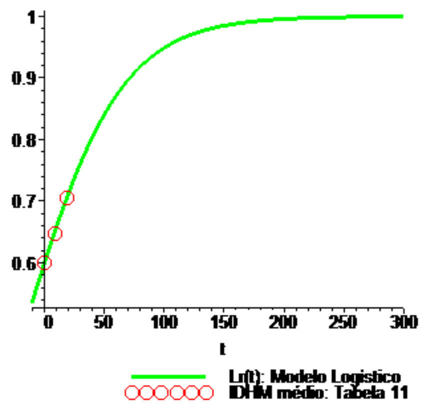
$$a := 0.6734802765$$

```
> lr:=t->1/(1+.6734802765*exp(-.2520673721e-1*t));
```

$$lr := t \rightarrow \frac{1}{1+0.6734802765\ \mathbf{e}^{(-0.02520673721\,t)}}$$

Gráfico

```
> Lr:=plot([lr(t)], t=-10..300,color=green,thickness=3,legend = ["Lr(t): Modelo Logístico"] ):
>Lr1:=pointplot([0,0.599,9,0.647,19,0.706],symbol=circle,symbolsize=20,color=red,legend="IDHM médio: Tabela 11"):
> display(Lr,Lr1);
```



validade

```
> lr(0.);lr(9.);lr(19.);
```

0.5975570877

0.6507090116

0.7056239833

Soma do quadro do resíduo

```
> (lr(0)-0.453)^2;
```

0.02089675160

```
> (lr(9)-0.576)^2;
```

0.005581436414

```
> (lr(19)-0.704)^2;
```

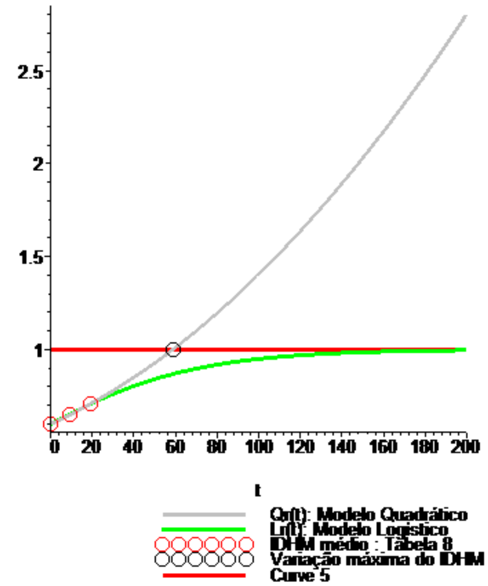
$0.2637321759\ 10^{-5}$

```
> .2089675160e-1+.5581436414e-2+.2637321759e-5;
```

0.02648082533

Comparação entre os modelos

```
> B:=plot( [qr(t) ,lr(t)] , t=0...200,legend=["Qr(t): Modelo Quadrático","Lr(t): Modelo Logístico"], color =[grey,green], thickness=3):
> #display(B);
>#pointplot([0,0.599,9,0.647,19,0.706],symbol=circle,symbolsize=20,color=red);
>B1:=pointplot([0,0.599,9,0.647,19,0.706],symbol=circle,symbolsize=20,color=red,legend="IDHM médio : Tabela 8"):
> B3:=plot( [1] , t=0...200,color=[red],thickness=3):
>B2:=pointplot([58.80776042,qr(58.80776042)],symbol=circle,symbolsize=20,color=black,legend="Variação máxima do IDHM"):
> display(B,B1,B2,B3);
```



QUADRÁTICO MÉDIO LONGEVIDADE

```
> Xvalues:=[0,9,19];
```

$$Xvalues := [0, 9, 19]$$

```
> Yvalues:=[0.644, 0.723,0.808];
```

$$Yvalues := [0.644, 0.723, 0.808]$$

```
> eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y], y=a*x^2+b*x+c,
{a,b,c}]]([Xvalues, Yvalues]);
```

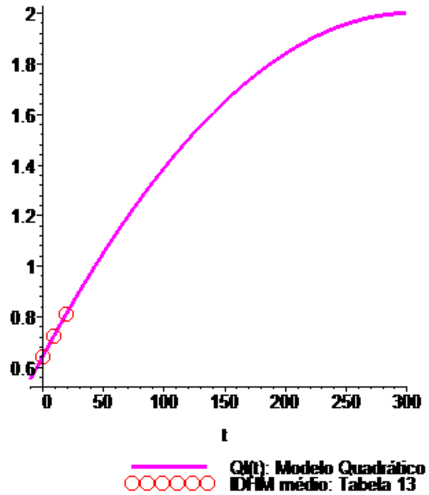
$$eq\_fit := y = -0.00001461988304\, x^2 + 0.008909356725\, x + 0.6440000000$$

```
> ql:=t->-.1461988304e-4*t^2+.8909356725e-2*t+.6440000000;
>
```

$$ql := t \rightarrow -0.00001461988304\, t^2 + 0.008909356725\, t + 0.6440000000$$

Gráfico

```
> Ql:=plot([ql(t)], t=-10..300,color=magenta,thickness=3,legend
=["Ql(t): Modelo Quadrático"] ):
>Ql1:=pointplot([0,0.644,9,0.723,19,0.808],symbol=circle,symbolsi
ze=20,color=red,legend="IDHM médio: Tabela 13"):
> display(Ql,Ql1);
```



Validade

```
> ql(0):=-.1461988304e-4*0^2+.8909356725e-2*0+.6440000000;
```

$$ql(0) := 0.6440000000$$

```
> ql(9):=-.1461988304e-4*9^2+.8909356725e-2*9+.6440000000;
```

$$ql(9) := 0.7230000000$$

```
> ql(19):=-.1461988304e-4*19^2+.8909356725e-2*19+.6440000000;
```

$$ql(19) := 0.8080000000$$

Soma do quadro do resíduo

```
> (ql(0)-0.644)^2;
```

$$0.$$

```
> (ql(9)-0.723)^2;
```

$$0.$$

```
> (ql(19)-0.808)^2;
```

$$0.$$

Resíduo zero.

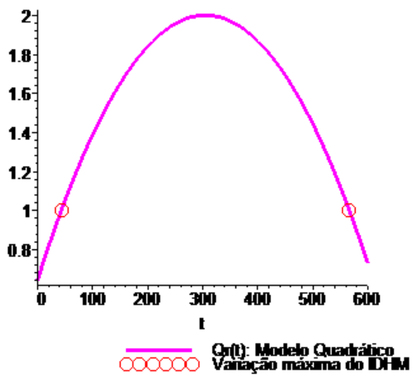
IDH máximo

```
> fsolve(ql(t)=1,t);
> solve(diff(ql(t),t)=0,t);
```

$$42.99082936, 566.4091707$$

$$304.7000000$$

```
> P:=plot([ql(t)],
t=0..600,color=magenta,thickness=3,legend=["Qr(t): Modelo
Quadrático"] ):
>
P1:=pointplot([42.99082936,ql(42.99082936),566.4091707,ql(566.409
1707) ],symbol=circle,symbolsize=20,color=red,legend="Variação
máxima do IDHM"):
> display(P,P1);
```




```
> ql(42.99082936);
```

$$1.000000000$$

```
> 1991+42.99082936;
```

$$2033.990829$$

LOGÍSTICO MÉDIO LONGEVIDADE

```
>
> solve({3*la+28*b=-2.99936875,28*la+442*b=-36.0459836},{la,b});
```

$$\{b = -0.04456757528, la = -0.5838255474\}$$

```
> a:=exp(-.5838255474);
```

$$a := 0.5577605406$$

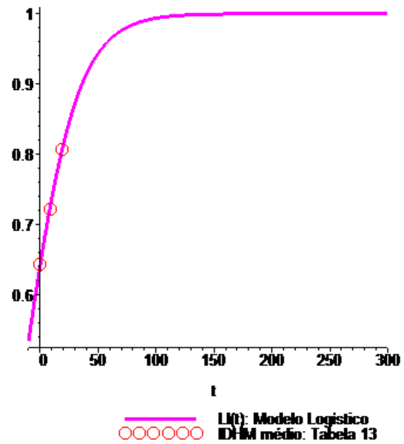
```
> ll:=t->1/(1+.5577605406*exp(-.4456757528e-1*t));
```

$$ll := t \rightarrow \frac{1}{1 + 0.5577605406\ \mathbf{e}^{(-0.04456757528\, t)}}$$

Gráfico

```
> Ll:=plot([ll(t)], t=-
10..300,color=magenta,thickness=3,legend=["Ll(t): Modelo
Logístico"] ):
```

```
>
Ll1:=pointplot([0,0.644,9,0.723,19,0.808],symbol=circle,symbolsize=20,color=red,legend="IDHM médio: Tabela 13"):
> display(Ll,Ll1);
```



Validade

```
> ll(0.);ll(9.);ll(19.);
```

$$0.6419471887$$

$$0.7280860773$$

$$0.8069962618$$

Soma do quadro do resíduo

```
> (ll(0)-0.6446)^2;
```

$$0.7037407793\ 10^{-5}$$

```
> (ll(9)-0.7236)^2;
```

$$0.00002012488954$$

```
> (ll(19)-0.8086)^2;
```

$$0.2571976214\ 10^{-5}$$

```
> .7037407793e-5+.2012488954e-4+.2571976214e-5;
```

$$0.00002973427354$$

QUADRÁTICO MÉDIO EDUCAÇÃO:

```
> Xvalues:=[0,9,19];
```

$$Xvalues := [0, 9, 19]$$

```
> Yvalues:=[0.245, 0.411,0.612];
```

$$Yvalues := [0.245, 0.411, 0.612]$$

```
> eq_fit:= fit[leastsquare[[x,y], y=a*x^2+b*x+c,
{a,b,c}]]([Xvalues, Yvalues]);
```

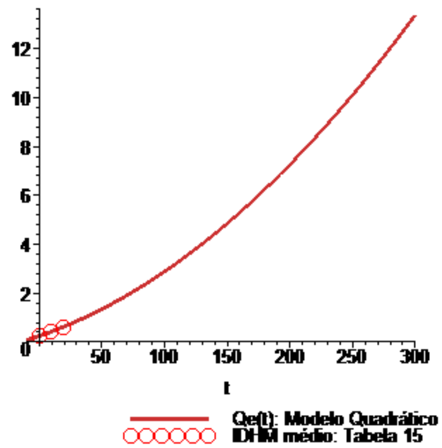
$$eq\_fit := y = 0.00008713450292\, x^2 + 0.01766023392\, x + 0.2450000000$$

```
> qe:=t->.8713450292e-4*t^2+.1766023392e-1*t+.2450000000;
>
```

$$qe := t \rightarrow 0.00008713450292\, t^2 + 0.01766023392\, t + 0.2450000000$$

Gráfico

```
> Qe:=plot([qe(t)], t=-10..300,color=orange,thickness=3,legend
=["Qe(t): Modelo Quadrático"] ):
>Qe1:=pointplot([0,0.245,9,0.411,19,0.612],symbol=circle,symbolsi
ze=20,color=red,legend="IDHM médio: Tabela 15"):
> display(Qe,Qe1);
```



Validade:

```
> > qe(0):=.8713450292e-4*0^2+.1766023392e-1*0+.2450000000;
```

$$qe(0) := 0.2450000000$$

```
> qe(9):=.8713450292e-4*9^2+.1766023392e-1*9+.2450000000;
```

$$qe(9) := 0.4110000000$$

```
> qe(19):=.8713450292e-4*19^2+.1766023392e-1*19+.2450000000;
```

$$qe(19) := 0.6120000000$$

Soma do quadro do resíduo

```
> (qe(0)-0.245)^2;
```

$$0.$$

```
> (qe(9)-0.411)^2;
```

$$0.$$

```
> (qe(19)-0.612)^2;
```

$$0.$$

Resíduo zero.

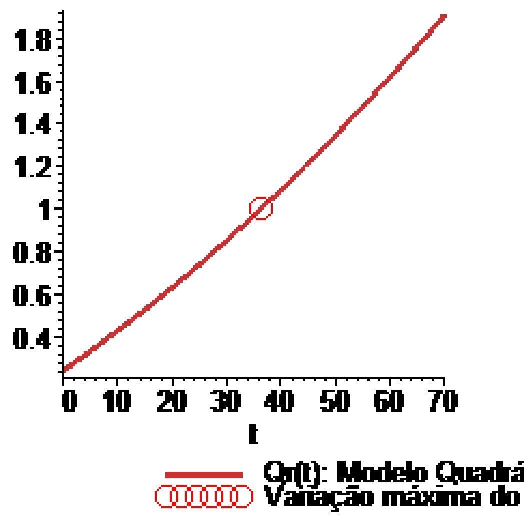
IDH máximo

```
> fsolve(qe(t)=1,t);
> solve(diff(qe(t),t)=0,t);
```

-238.9410449, 36.26319248

-101.3389262

```
> S:=plot([qe(t)],
t=0..70,color=orange,thickness=3,legend=["Qr(t): Modelo
Quadrático"] ):
>
S1:=pointplot([36.26319248,qe(36.26319248)],symbol=circle,symbols
ize=20,color=red,legend="Variação máxima do IDHM"):
> display(S,S1);
```




```
> qe(36.26319248);
```

1.000000000

```
> 1991+36.26319248;
```

2027.263192

```
> 2020-1991;
```

29

```
> qe(29);
```

0.8304269007

LOGÍSTICO MÉDIO EDUCAÇÃO

```
> solve({3*la+28*b=1.023624573,28*la+442*b=-5.463934543},{la,b});
```

$$\{b = -0.08312415438, la = 1.117033632\}$$

```
> a:=exp(1.117033632);
```

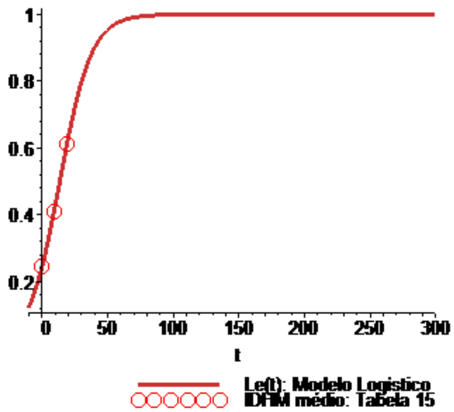
$$a := 3.055776189$$

```
> le:=t->1/(1+3.055776189*exp(-.8312415438e-1*t));
```

$$le := t \rightarrow \frac{1}{1 + 3.055776189\ e^{(-0.08312415438\,t)}}$$

Gráfico

```
> Le:=plot([le(t)], t=-10..300,color=orange,thickness=3,legend
=["Le(t): Modelo Logístico"] ):
>Le1:=pointplot([0,0.245,9,0.411,19,0.612],symbol=circle,symbolsi
ze=20,color=red,legend="IDHM médio: Tabela 15"):
> display(Le,Le1);
```



Validade:

```
> le(0.);le(9.);le(19.);
```

$$0.2465619288$$

$$0.4088029216$$

$$0.6135656571$$

Soma do quadrado do resíduo

```
> (le(0)-0.245)^2;
>
```

$$0.2439621576\ 10^{-5}$$

```
> (le(9)-0.411)^2;

>
```

$$0.4827153496\ 10^{-5}$$

```
> (le(19)-0.612)^2;
```

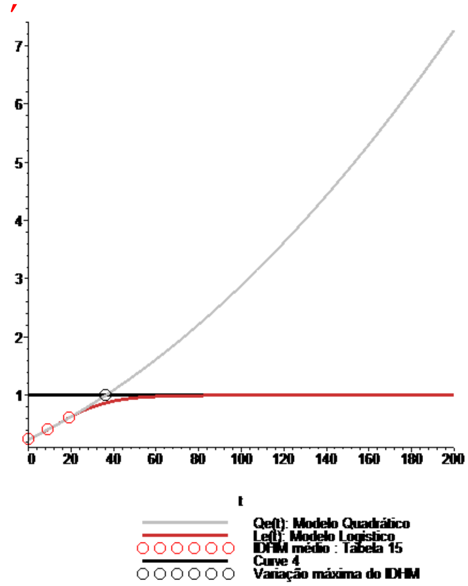
$0.2451282155\ 10^{-5}$

```
> .2439621576e-5+.4827153496e-5+.2451282155e-5;
```

$0.9718057227\ 10^{-5}$

Comparação dos modelos:

```
> E:=plot( [qe(t) ,le(t)] , t=0...200,legend=["Qe(t): Modelo
Quadrático","Le(t): Modelo
Logístico"],color=[grey,orange],thickness=3):
> #display(E);
>
#pointplot([0,0.245,9,0.411,19,0.612],symbol=circle,symbolsize=20
,color=red);
>
E1:=pointplot([0,0.245,9,0.411,19,0.612],symbol=circle,symbolsize
=20,color=red,legend="IDHM médio : Tabela 15"):
> E2:=plot( [1] , t=0...200,color=[black],thickness=3):
>
E3:=pointplot([36.26319248,qe(36.26319248)],symbol=circle,symbols
ize=20,color=black,legend="Variação máxima do IDHM"):
> display(E,E1,E2,E3);
```



ANEXO B - Arquivo Maple Modelagem Analítica

```
> (ln(((1/0.704)-1)/1.207))/(-19);
```

0.05550299184

```
> (1-0.453)/0.453;
>
```

$$1.207505519$$

```
> i:=t->1/(1+1.2075*exp(-.5550299184e-1*t));
```

$$i := t \rightarrow \frac{1}{1 + 1.2075\ \mathbf{e}^{(-0.05550299184\, t)}}$$

```
> i(0);
```

$$0.4530011325$$

```
> i(9);
```

$$0.5771231857$$

```
> i(19);
```

$$0.7039136879$$

Resíduo ao quadrado

```
> (i(0)-0.453)^2;
```

$$0.128255625\ 10^{-11}$$

```
> (i(9)-0.576)^2;
```

$$0.1261546117\ 10^{-5}$$

```
> (i(19)-0.704)^2;
```

$$0.7449778606\ 10^{-8}$$

Soma do quadrado do resíduo

```
> .128255625e-11+.1261546117e-5+.7449778606e-8;
```

$$0.1268997179\ 10^{-5}$$

estimativa para 2012

```
> i(21);
```

$$0.7265146760$$

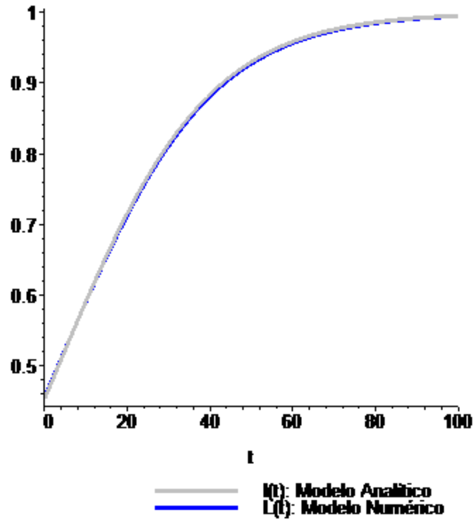
Logístico pelo ajuste Numérico

```
> L:=t->1/(1+1.197*exp(-.0544418*t));
```

$$L := t \rightarrow \frac{1}{1 + 1.197\ \mathbf{e}^{(-0.0544418\, t)}}$$

Gráfico - Comparação dos modelos

```
> A:=plot( [i(t),L(t)] , t=0...100,legend=["I(t): Modelo
Analítico","L(t): Modelo
Numérico"],color=[grey,blue],thickness=3):
> display(A);
```



IDHM Renda

```
> a:=(1/.599)-1;
```

$$a := 0.669449082$$

```
> b:=(ln(((1/0.7068)-1)/0.6694))/(-19);
```

$$b := 0.02518522528$$

```
> Lra:=t->1/(1+.669449082*exp(-.2518522528e-1*t));
```

$$Lra := t \rightarrow \frac{1}{1 + 0.669449082\ \mathbf{e}^{(-0.02518522528\, t)}}$$

```
> Lra(0);Lra(9);Lra(19);
```

$$0.5989999999$$

$$0.6520283877$$

$$0.7067848055$$

Resíduo ao quadrado

```
> (Lra(0)-0.5991)^2;
```

$$0.1000002000\ 10^{-7}$$

```
> (Lra(9)-0.6477)^2;
```

$$0.00001873494008$$

```
> (Lra(19)-0.7068)^2;
```

$$0.2308728302\ 10^{-9}$$

Soma do quadrado do resíduo

```
> .1000002000e-7+.1873494008e-4+.2308728302e-9;
>
```

$$0.00001874517097$$

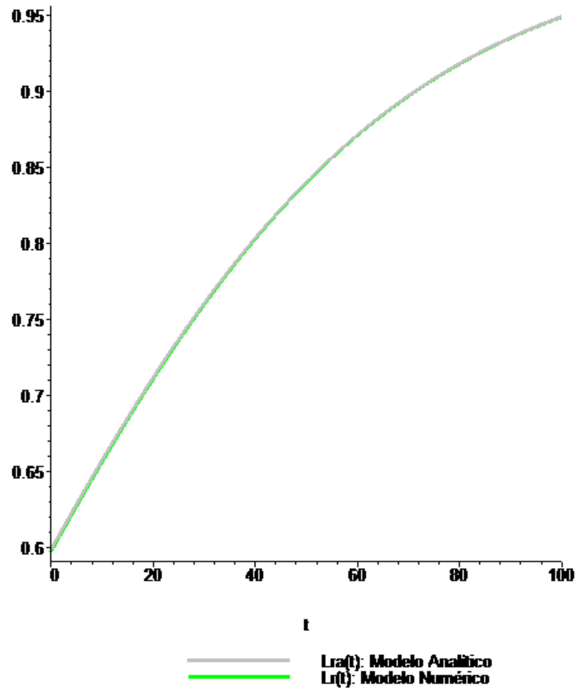
Lr calculado pelo ajuste

```
> Lr:=t->1/(1+.67348*exp(-.025206*t));
```

$$Lr := t \to \frac{1}{1 + 0.67348\ \mathbf{e}^{(-0.025206 t)}}$$

Gráfico – Comparação dos modelos

```
> B:=plot( [Lra(t),Lr(t)] , t=0...100,legend=["Lra(t): Modelo
Analítico","Lr(t): Modelo
Numérico"],color=[grey,green],thickness=3):
> display(B);
```



Longevidade

```
> a:=(1/.6446)-1;
```

$$a := 0.551349674$$

```
> b:=(ln(((1/0.8086)-1)/.5513))/(-19);
```

$$b := 0.04449803809$$

```
> Lla:=t->1/(1+.5513*exp(-.04449*t));
```

$$Lla := t \to \frac{1}{1 + 0.5513\ \mathbf{e}^{(-0.04449 t)}}$$

Validade

```
> Lla(0);Lla(9);Lla(19);
```

$$0.6446206408$$

$$0.7302489789$$

$$0.8085763625$$

Resíduo ao quadrado

```
> (Lla(0)-0.6446)^2;
```

$$0.4260426246\ 10^{-9}$$

```
> (Lla(9)-0.7236)^2;
```

$$0.00004420892041$$

```
> (Lla(19)-0.8086)^2;
```

$$0.5587314062\ 10^{-9}$$

Soma do quadrado do resíduo

```
> .4260426246e-9+.4420892041e-4+.5587314062e-9;
```

$$0.00004420990518$$

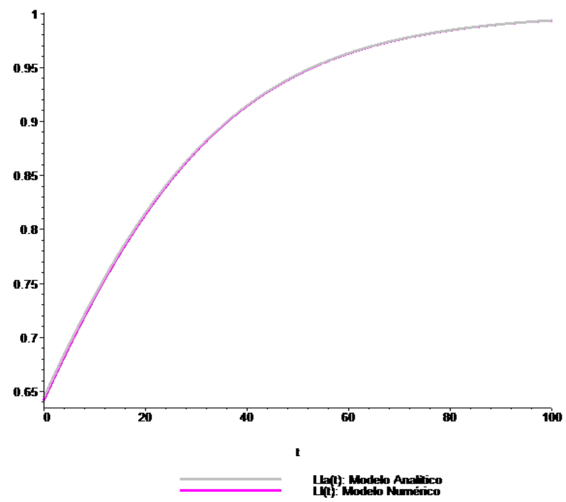
> Equação Modelo Numérico

```
> Ll:=t->1/(1+.5577*exp(-.04456*t));
```

$$Ll := t \rightarrow \frac{1}{1 + 0.5577\ \mathbf{e}^{(-0.04456 t)}}$$

Gráfico – Comparação dos modelos

```
> C:=plot( [Lla(t),Ll(t)] , t=0...100,legend=["Lla(t): Modelo
Analítico","Ll(t): Modelo
Numérico"],color=[grey,magenta],thickness=3):
> display(C);
```



Educaçao

```
> a:=(1/0.2455)-1;
```

$$a := 3.073319756$$

```
> b:=(ln(((1/0.6124)-1)/3.07332))/(-19);
```

$$b := 0.08316685237$$

```
> Lea:=t->1/(1+3.0733*exp(-.08316*t));
```

$$Lea := t \rightarrow \frac{1}{1 + 3.0733\ \mathbf{e}^{(-0.08316 t)}}$$

Validade

```
> Lea(0);Lea(9);Lea(19);
```

$$0.2455011907$$

$$0.4074995263$$

$$0.6123706405$$

Resíduo ao quadrado

```
> (Lea(0)-0.2455)^2;
```

$$0.141776649\ 10^{-11}$$

```
> (Lea(9)-0.4112)^2;
```

$$0.00001369350560$$

```
> (Lea(19)-0.612)^2;
```

$$0.1373743802\ 10^{-6}$$

```
> .141776649e-11+.1369350560e-4+.1373743802e-6;
```

$$0.00001383088140$$

```
> Le:=t->1/(1+3.0557*exp(-.0831*t));
```

$$Le := t \rightarrow \frac{1}{1 + 3.0557\ \mathbf{e}^{(-0.0831 t)}}$$

Gráfico – comparação dos modelos

```
> F:=plot( [Lea(t),Le(t)] , t=0...100,legend=["Lea(t): Modelo
Analítico","Le(t): Modelo
Numérico"],color=[grey,orange],thickness=3):
> display(F);
```